



Plasticitetsteoretisk analyse af forankring og stød af forkammet armering i beton

Hess, Uwe; Nielsen, Mogens Peter

Publication date:
1984

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

Citation (APA):
Hess, U., & Nielsen, M. P. (1984). *Plasticitetsteoretisk analyse af forankring og stød af forkammet armering i beton*. Technical University of Denmark. BYG-Rapport No. R-184

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Department of Structural Engineering
Danmarks Tekniske Højskole · Technical University of Denmark

Plasticitetsteoretisk Analyse af Forankring og Stød af Forkammet Armering i Beton

Uwe Hess

Plasticitetsteoretisk analyse af
forankring og stød af forkammet armering i beton

Uwe Hess

Afdelingen for Bærende Konstruktioner. Danmarks tekniske Højskole.

September 1983

**Plasticitetsteoretisk analyse af forankring og stød af forkammet
armering i beton**

Copyright © by Uwe Hess 1984

Tryk:

Afdelingen for Bærende Konstruktioner

Danmarks Tekniske Højskole

Lyngby

ISBN 87-87336-16-2

Forord

Denne rapport er skrevet som et led i de betingelser, der skal opfyldes ved erhvervelsen af den tekniske licentiatgrad ved Danmarks tekniske Højskole.

Licentiatstudiet er foregået ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner med professor, dr.techn. Mogens Peter Nielsen som faglærer.

Jeg ønsker her at takke min faglærer såvel som de øvrige medlemmer i "forskydningsgruppen" for et inspirerende samarbejde under studiet.

Jeg vil også rette en tak til censor, lektor, lic.techn. Poul Sandbye for en værdifuld og omhyggelig kommentering af afhandlingen.

Endvidere rettes en tak til de medarbejdere ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, som har medvirket ved udgivelsen af denne rapport.

Uwe Hess

Resumé

Rapporten indeholder en behandling af styrken af forankringer og stød i forkammet armeringsjern ved hjælp af plasticitetsteoriens øvreverditeknik.

Indledningsvis gives en kort repetition af det plasticitetsteoretiske grundlag for behandling af beton som et stift plastisk materiale.

Der opstilles dernæst en brudfigur og en tilhørende øvreverdi for det lokale brud omkring kammene på et enkelt armeringsjern.

For bjælker med 1 og 2 jern findes øvreverdiløsninger for forankringer med forkammede armeringsjern. For hver bjælketype undersøges flere øvreverdier og ved hjælp af numerisk optimering findes de bedste løsninger.

De fundne teoretiske bæreevner sammenlignes endelig med forankringsforsøg og stødforsøg.

Summary

The upper bound theorem of the theory of plasticity is used to attempt a solution of the bond strength of anchorages and splices in deformed reinforcement bars.

The report gives first a short briefing of the theoretical background for using the theory of plasticity, and the consideration of concrete as a rigid-plastic material.

A local failure mechanism and a upper bound solution is propounded for a single deformed reinforcement bar.

Upper bound solutions are also propounded for anchorages in beams with 1 and 2 reinforcement bars. The upper bounds for each beam-type are numerically optimized, and the best solutions are stated.

Finally the theoretically stated strengths are compared with anchorage tests and splice tests.

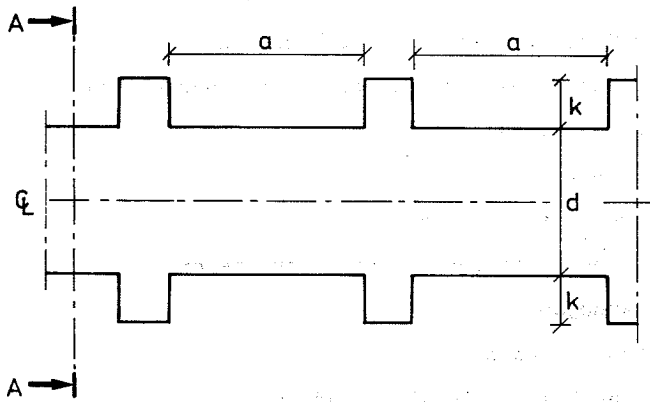
Symboler	1
Snit i model af forkammet armeringsjern	2
1. Indledning	4
2. Plasticitetsteori	15
2.1 Flydebetingelse	15
2.2 Flydelov	15
2.3 Ekstremalprincipperne	16
2.4 Beton	17
2.5 Armering	19
2.6 Flydeflader	19
2.6.1 Betonen	20
2.6.2 Armeringen	23
3. Det lokale brud omkring et jern	24
3.1 Rotationssymmetrisk brud omkring et forkammet armeringsjern	24
3.2 Prøvelegeme efter Dansk Standard, DS 2082	39
3.3 Kamhøjdens indflydelse	43
3.4 Forankring af armeringsjern i ikke-rotationssymmetriske betonlegemer	47
4. Øvre værdier for forankringer/stød i bjælker	51
4.1 Bjælker med ét jern	51
4.2 Bjælker med to jern	55
4.3 Bjælker med tre jern	60
4.4 Endebidrag	63
4.5 Betonstyrkens indflydelse	64
4.6 Vederlagstrykkets indflydelse	64
4.7 Tværarmeringens indflydelse	72
4.8 Dæklagets indflydelse	73
4.9 Indflydelse af stødets længde	78
4.10 Regneteknik og tilnærmede beregninger	82
5. Forankringsstyrke ved vederlag	86
5.1 Vederlagstryk r/σ_c og betonstyrken σ_c	89
5.2 Tværarmering og dæklag	101
6. Styrke af stød	109
6.1 Stød med 2 og 3 jern	109
6.2 Stød med flere end 3 jern	112
7. Diskussion og konklusion	114
Litteratur	117

	Side
Appendix 1	A1.1
Appendix 2	A2.1

SYMBOLER:

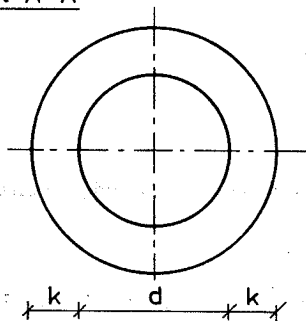
- σ_c : trykstyrke målt på 150/300 cylindre
 σ_t : den plastiske trækstyrke
 v : den dimensionsløse plastiske betontrykstyrke
 ρ : σ_t / σ_c
 k : $1 + \sin \varphi / 1 - \sin \varphi$, $k = 4$ for beton
 φ : friktionsvinkel, $\varphi = 37^\circ$ for beton
 σ_a : flydespænding for armering (hovedarmering)
 λ : $\lambda = v - \rho(k-1)$
 μ : $\mu = v - \rho(k+1)$
 A_a : areal af armering
 d : diameter af det stødte armeringsjern
 k : kamhøjden
 a : kamafstanden
 α : vinkel i den lokale brudfigur
 γ : vinkel i den lokale brudfigur
 l : forankringslængde
 c : dæklag, bunddæklag
 b : bjælkens bredde
 h : bjælkens højde
 r : vederlagstryk
 c_1 : sidedæklag
 s : indbyrdes afstand mellem hovedjernene
 ψ : $\psi = 2A_b \sigma_b / l d \sigma_c$
 A_b : samlet bøjleareal der krydser flydefladerne
 σ_b : flydespænding for bøjlearmering

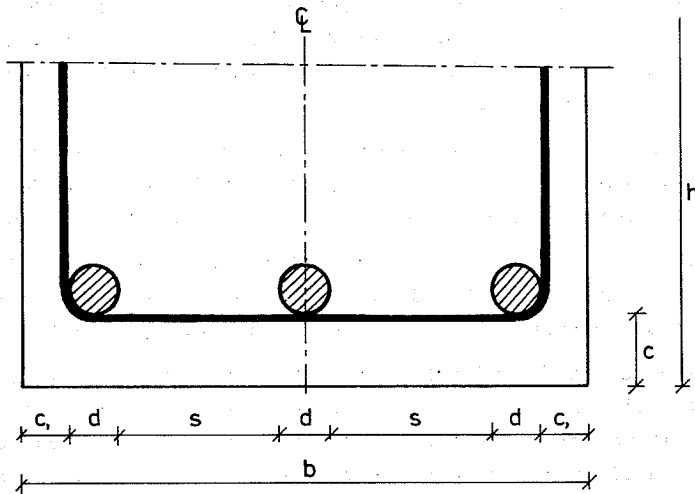
Snit i model af forkammet armeringsjern.



d: jernets diameter, k: kamhøjde, a: kamafstand.

Snit A-A





d : hovedarmeringens diameter

b : bjælkens bredde

h : bjælkens højde

c : bunddæklag

c_1 : sidedæklag

s : indbyrdes afstand mellem hovedjernene

1. INDLEDNING

Hvor langt et stykke armeringsjern, der skal bruges for at føre kræfterne fra et jern til et andet eller til den omgivende beton, er et grundlæggende problem for den praktiske anvendelse af beton.

Forankrings- og specielt stødproblemet har derfor været studeret længe. Abrams [13.1] henviser således til, at man muligvis allerede i 1876 udførte forsøg for at bestemme vedhæftningen mellem beton og armeringsjern.

Det må da også have været nødvendigt for at kunne anvende armeret beton i praksis, at man tidligt, på en eller anden måde, har skaffet sig en vis viden om de nødvendige stød og forankringslængder.

I denne afhandling søges stød- og forankringsproblemet løst ved hjælp af plasticitetsteorien, der har gjort det muligt at løse andre forskydningsproblemer, f.eks. i bjælker og plader.

Anvendelsen af den af M.P.Nielsen og M.W.Bræstrup [78.1] udviklede metode til dimensionering af bjælker for forskydning vil ofte medføre, at man skal forankre større kræfter ved vederlagene, end hvis man dimensionerede samme bjælke efter de hidtil anvendte metoder. En naturlig konsekvens er derfor at søge at få en forøget viden om stød og forankrings virkemåde og bæreevne ved hjælp af plasticitetsteorien.

Forankrings- og stødproblemet er gennem tiderne blevet behandlet på mange forskellige måder. De ældste kilder beretter om forsøg og deraf afledte empiriske formler til bestemmelse af stød- og forankringslængder.

Forskningen kan opdeles i to hovedgrupper:

1. Undersøgelse af indflydelse af forskellige parametre som armeringsdiameter, profilering, betonstyrke osv. på forskydningspændingen og dens fordeling.
2. Bestemmelse af en form for Hooke's lov for forankringer.

Denne forskning har trods stor snilde ved fremstillingen af prøvelegemer og måleudstyr ikke givet en overbevisende grundlæggende

viden om problemet. Man er således fortsat uenige om udseendet af spændingsfordelingen hen langs det forankrede jern.

Betonnormernes bestemmelser om forankring og stødning er da også normalt forsigtige. Inden for de seneste 10-20 år har man også forsøgt at bestemme forankrings- og stødstyrken ad ren teoretisk vej. Elasticitetsteorien har været anvendt både som forudsætning ved anvendelse af håndregningsmetoder og ved anvendelse af finite element programmer.

Tillempede plastiske beregninger har også været forsøgt.

Den teoretiske behandling har dog heller ikke på afgørende vis bragt en løsning på forankringsproblemet nærmere.

Formålet med denne afhandling er ikke at give en oversigt over de anvendte metoder og den tilgængelige litteratur om emnet. Der kan her henvises til artikler af ACI Committee 408 [70.1], Dörr et al. [74.2] og Tepfers [73.1], der alle indeholder fyldige referencelister.

Formålet med denne behandling er udelukkende at vise anvendelsen af en stift plastisk materialemodel for beton på forankrings/stød-problemet.

Som en indføring til emnet skal vi dog alligevel se på, hvordan forankringsproblemet har været behandlet tre forskellige steder. Dels i den danske betonnorm, DS 411 [73.2], dels i Tepfers doktorafhandling [73.1] og dels i en amerikansk undersøgelse af Orangun et al. [75.4].

Behandlingen af stød og forankringer i den danske betonnorm, DS 411 [73.2], kan i vidt omfang anses som typisk for, hvordan normer behandler forankringsproblemet. Kravet om tværarmering i stød- og forankringszoner indgår dog ikke i alle normer.

I DS 411 [73.2] har man tabelleret kravene til forankringslængden. Fra normens tabel 7.2.3 fås med normens nomenklatur

$$\frac{l}{d_a} \frac{\sigma_{bk}}{\sigma_{ak}} \geq \frac{0.09}{\xi}$$

hvor l er forankringslængden, σ_{bk} den karakteristiske betontrækstyrke, d_a det forankrede jerns diameter, σ_{ak} det forankre-

de jerns karakteristiske flydespænding og ζ den i normen nærmere omtalte forankringsfaktor. Udtrykket kan omskrives til:

$$\frac{\zeta \sigma_{bk}}{4 \cdot 0.09 \sigma'_{bk}} \geq \frac{\pi \frac{d_a^2}{4} \sigma_{ak}}{\pi d_a l \sigma'_{bk}}$$

Her er σ'_{bk} betonens karakteristiske trykstyrke. Højresiden svarer til det i denne afhandling benyttede τ/σ_c . Indsættes $\sigma_{bk}/\sigma'_{bk} \approx 0.10$ og $\xi = 0.8$ svarende til for eksempel tentorstål, fås:

$$0.22 \geq \frac{\tau}{\sigma_c} \quad (1.1)$$

Fra normens tabel 7.2.3 fås ligeledes:

$$\frac{l}{d_a} \geq \frac{30}{\zeta}$$

der kan omskrives til:

$$\frac{\zeta \sigma_{ak}}{30 \sigma'_{bk} 4} \geq \frac{\pi \frac{d_a^2}{4} \sigma_{ak}}{l d_a \pi \sigma'_{bk}}$$

Her er igen anvendt normens nomenklatur.

Indsættes f.eks. $\sigma_{ak} = 560$ MPa og $\sigma'_{bk} = 20$ MPa samt $\zeta = 0.8$ svarende til tentorstål, fås:

$$0.19 \geq \frac{\tau}{\sigma_c} \quad (1.2)$$

For dansk kamstål fås - stadig med $\sigma'_{bk} = 20$ MPa

$$0.16 \geq \frac{\tau}{\sigma_c} \quad (1.2)$$

Det er det skrappeste af de to krav (1.1) og (1.2), der gælder.

DS 411 har som nævnt også et krav om tværarmering i stød og forankringszoner. Normens vejledning angiver (v.7.2.4.1)

$$a \leq 55 \frac{d_t^2}{d_l}$$

hvor a er afstanden mellem tværarmeringen, d_t tværarmeringens diameter og d_l hovedarmeringens diameter.

Udtrykket kan omskrives til:

$$\frac{\pi \sigma_{tk}}{110 \sigma'_{bk}} \leq \frac{2 d_t^2 \pi \sigma_{tk}}{a d_l \sigma'_{bk}} \quad (1.3)$$

hvor σ_{tk} er tværarmeringens karakteristiske flydespænding.

Højre side af (1.3) svarer til det i denne afhandling anvendte

$$\psi_s = 2 A_t \cdot \sigma_t / l d \sigma_c .$$

Indsættes $\sigma_{tk} = 560$ MPa og $\sigma'_{bk} = 20$ MPa, fås

$$0.80 \leq \psi_s = \psi_{gr}$$

Såfremt tværarmeringen øges, kan stødlængden reduceres, dog maksimalt således, at en tredobling af tværarmeringen medfører en reduktion af forankrings/stødlængden til 70% af den oprindelige forankrings/stødlængde; eller omvendt at bæreevnen forøges med 43%.

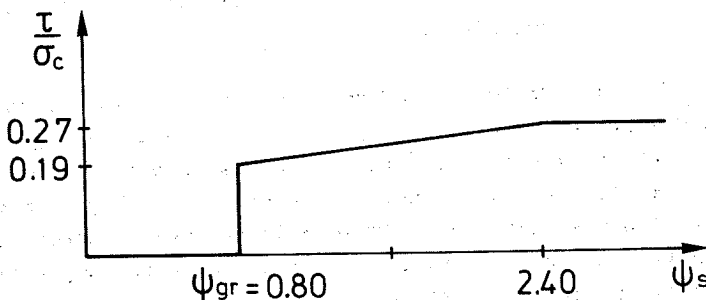


Fig.1.1: Bæreevne, jfr. DS 411, som funktion af tværarmeringens styrke for stød/forankring i armeringsjern med $\sigma_{tk} = 560$ MPa og $\zeta = 0.8$ i en beton med $\sigma'_{bk} = 20$ MPa.

Det kan være rart at have normens krav i tankerne, når forsøg og beregninger senere sammenlignes.

Tepfers prøver i sin doktorafhandling [73.1] teoretisk at bestemme bæreevnen af stød. Han gennemregner efter en noget tillempet plastisk metode en del mulige brudfigurer. Dog tager han hverken hensyn til en eventuel brudbetingelse for betonen, eller om bruddet er kinematisk muligt. Han gør sine brud mulige ved at lade dele af bjælkerne være revnet allerede i et elastisk stadium.

Tepfers opdeler sin behandling i 6 tilfælde afhængigt af stødets geometri.

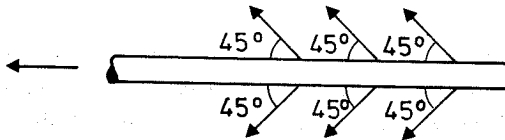


Fig.1.2: Armeringsjernets påvirkning af den omkringliggende beton.

Fælles for alle Tepfers' brudformer er, at han antager, at kraften fra armeringsjernet afleveres til den omgivende beton som kræfter, der danner en vinkel på 45° med armeringsjernets tyngdepunktsakse. Disse kræfter giver anledning til et radiært tryk på den omgivende beton. I brudsituationen modsvares dette tryk af betonens trækstyrke (Tepfers baserer sine formler på spaltetrækstyrken) i de på fig.1.3 og 1.4 viste flader.

Ved bruddet af type 1 antages, at dæklagene har en sådan tykkelse,

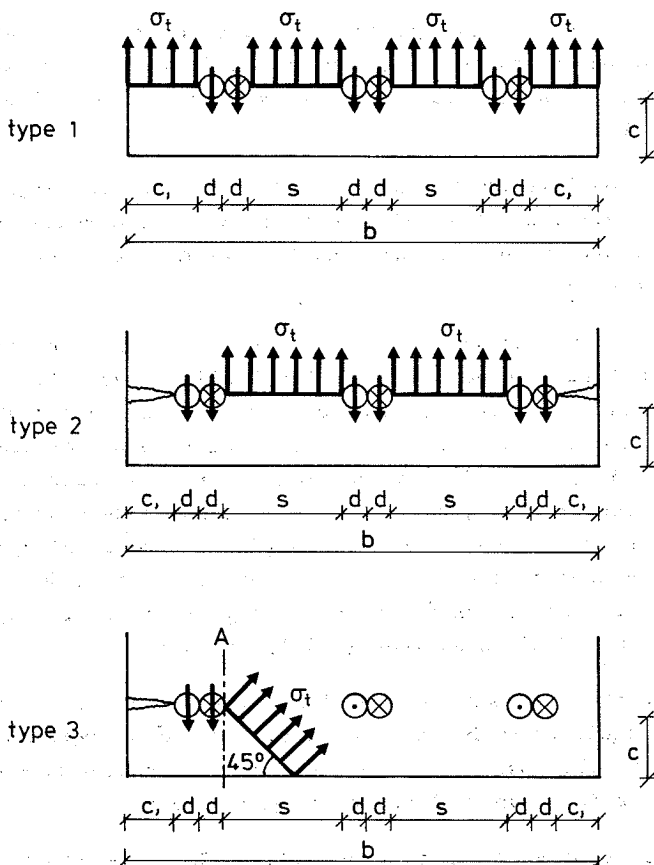


Fig.1.3: Brud type 1, type 2 og type 3 efter Tepfers [73.1], pilene i armeringsjernene angiver deres bevægelsesretning ved bruddet.

at brud i stødene resulterer i, at dæklaget i hele bjælkens bredde sprænges af. Tepfers forklarer det på den måde, at sidedæklaget har en sådan tykkelse, at brud i sidedæklaget ikke kan opvejes af bæreevnekapaciteten mellem jernene eller omvendt.

I bruddet af type 2 antages sidedæklagets tykkelse at være så lille, at en langsgående revne dannes tidligt i belastningshistorien. Sidedæklaget antages derfor ikke at bidrage til stødets ultimative bæreevne.

Brud af type 3 fremkommer når afstanden mellem armeringsjernene er stor, og tykkelsen af sidedæklaget er mindre end tykkelsen af bunddæklaget. Der er her igen gået ud fra, at dæklaget revner på et tidligt tidspunkt.

I modsætning til bruddet af type 2 antages nu på grund af den store afstand mellem jernene, at hjørnet vil blive revet af. I første omgang antager Tepfers, at hjørnet bærer lasten på stødet som en udkraget bjælke. Bæreevnen af stødet under denne forudsætning udregnes ([73.1], p.63-64), og det konstateres, at udtrykket bliver ret kompliceret. På grund af udtrykkets udseende - og da bruddet også kan betragtes som et rent forskydningsbrud i snittet A-A (se fig.1.3) - bruges herefter en model med rent træk i det på figuren viste brudsnit. En sådan model opfylder ikke ligevægtsbetingelserne, men Tepfers skriver ([73.1], p.65):

"The obtained equations will not always fulfil the claim of equilibrium but they will be secured by experiments where the possible parameters cover a greater range of variation than will be met in practice."

Bruddet af type 4 er som type 3-bruddet, dog antages her, at bunddæklaget er tyndere end sidedæklaget. Bunddæklaget revner derfor på et tidligt tidspunkt, og lasten bæres så af sidedæklaget på samme måde som beskrevet for bunddæklaget i type 3.

Bruddene af type 5 og 6 bliver behandlet på tilsvarende måde, idet Tepfers igen forestiller sig, at der opstår revner i bunddæklaget på et tidligt tidspunkt. Det endelige brud forårsages dog af svigt i de viste flader.

Stød med tværarmering behandles på tilsvarende måde.

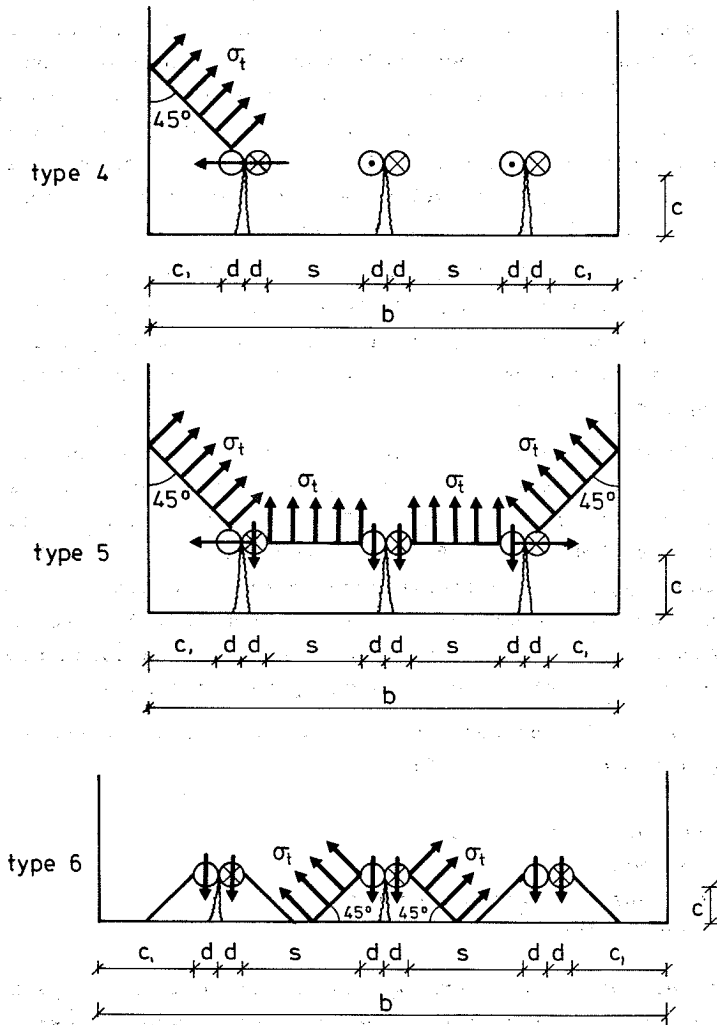


Fig.1.4: Brud type 4, type 5 og type 6 efter Tepfers [73.1]. Pilene i armeringsjernene angiver deres bevægelsesretning ved bruddet.

Tepfers tager ikke i nogen form hensyn til et eventuelt ydre tryk (som for eksempel i vederlagszonerne), han behandler udelukkende stødproblemet. I de fleste af sine brudtyper antager Tepfers, at der sker en form for "progressiv kollaps", idet en del af bruddet opstår tidligt, dvs. mens opførslen endnu antages elastisk. Derpå regner han så plastisk uden dog at overholde ligevægtsbetingelserne endsige normalitetsbetingelsen. Den noget tillempede plastiske betragtningsmåde til trods har Tepfers' systematiske opdeling i brudformer dog alligevel givet inspiration til en del af de i denne afhandling anvendte brudfigurer.

Orangun et al. [75.4] forsøger sig indledningsvis med en lignende beregningsmåde som den af Tepfers [73.1] anvendte, men de opgiver dog, da de konstaterer, at vinklen mellem armeringsaksen og brudfladen foran kammene kan variere væsentligt afhængig af hvilke antagelser, man gør.

Hvor Tepfers med sin udtalelse ([73.1], p.65) kommer tæt på at sige, at hans formler er empiriske med en vis bund i virkeligheden, tager Orangun et al. skridtet fuldt ud og giver sig i kast med en statistisk behandling af alle de forsøg, de kan få fat i. Hovedvægten ligger dog på amerikanske forsøg. Resultatet af den statistiske behandling er nogle empiriske formler, der med en i betonsammenhæng lille usikkerhed beskriver støds og forankrings bærevne inden for et nærmere angivet parameterområde.

Indledningsvis antages, at den gennemsnitlige forskydningsspænding i stødet afhænger af:

1. betonens trækstyrke
2. dæklaget
3. det stødte armeringsjerns diameter
4. stødets længde

De nævnte parametre omarrangeres til dimensionsløse parametre, og ved hjælp af en ikke-lineær regressionsanalyse findes:

$$u^*/\sqrt{f_c} = 1.22 + 3.23 c/d_b + 53.0 d_b/\ell_s$$

hvor følgende betegnelser er benyttet:

u^* : det bedste udtryk for den gennemsnitlige forskydningsspænding på armeringsjernet i en bjælke med konstant moment i stødzonen.

f'_c : cylindertrykstyrken for beton målt i psi.

$\sqrt{f'_c}$: en størrelse, der er proportional med betonens trækstyrke.

c : det mindste af bund- og sidedæklaget.

d_b : hovedarmeringens diameter.

ℓ_s : stødets længde.

Med en afrundet udgave af ovennævnte udtryk, nemlig

$$u^*/\sqrt{f'_c} = 1.2 + 3 c/d_b + 50 d_b/\ell_s$$

findes $u_{\text{test}}/u_{\text{beregn}} = 1.07$ med en standardafvigelse på 15% for de 62 forsøg, der er anvendt ved regressionsanalysen.

Når samme formel anvendes på Tepfers' forsøg (der ikke blev benyttet ved regressionsanalysen), findes $u_{\text{test}}/u_{\text{beregn}} = 1.18$ og en standardafvigelse på 32%. Man har benyttet 92 af de af Tepfers i [73.1] publicerede forsøg.

På tilsvarende måde opstilles et udtryk, hvor tværarmeringen i stødet tages i regning. Her fås:

$$u^*/\sqrt{f'_c} = 1.2 + 3 \frac{c}{d_b} + 50 \frac{d_b}{\ell_s} + \frac{A_{tr} f_{yt}}{500 s d_b}$$

hvor

$$\frac{A_{tr} f_{yt}}{500 s d_b} \leq 3$$

Her er

A_{tr} : tværsnitsarealet af den tværarmering, der danner en vinkel på 90° med brudfladen.

f_{yt} : flydespænding for tværarmeringen.

s : afstanden mellem de enkelte jern i tværarmeringen.

For 27 stødforsøg fås: $u_{\text{test}}/u_{\text{beregn}} = 1.10$ og en spredning på 5%. Gennemregnes 27 forankringsforsøg (uden for vederlagszonerne), fås $u_{\text{test}}/u_{\text{beregn}} = 1.03$ og en spredning på 15%.

Orangun et al. behandler ikke forankringer i vederlagszoner. Forankringer andre steder i bjælken behandles på samme måde som stød.

2. PLASTICITETSTEORI

Afhandlingen bygger på den klassiske plasticitetsteoris anvendelse på armeret og uarmeret beton.

Dette kapitel indeholder derfor en kort gennemgang af de anvendte formler og udtryk samt deres forudsætninger.

Kapitlet bygger i væsentlig grad på Lange-Hansen [75.1] og [75.2], Jensen [76.1] samt Bråstrup et al. [76.2].

2.1 Flydebetingelse

Materialerne antages at være stift plastiske, dvs. deformationer kan kun foregå, når materialet er i flydning. Til beskrivelse af flydetilstanden anvendes én eller flere funktioner af formen:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (2.1.1)$$

Spændingstilstande, hvor der ikke er flydning, er karakteriseret ved $f < 0$. Flydning indtræder som nævnt, når $f = 0$. $f > 0$ svarer til spændingstilstande, som materialet ikke er i stand til at optage, og som derfor ikke kan forekomme.

2.2 Flydelov

Når materialet er i flydning, styres forholdet mellem deformationerne af den associerede flydelov, idet retningen af tøjningsvektoren ϵ_i (egentlig tøjningshastighedsvektoren) bestemmes ved:

$$\epsilon_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \quad , \quad \lambda \geq 0 \quad , \quad i = [1, 2, 3] \quad (2.2.1)$$

Afsættes ϵ_i i samme koordinatsystem som flydefladen, vil ϵ_i stå vinkelret på flydefladen i σ_i 's endepunkt; derfor har den associerede flydelov også navnet normalitetsbetingelsen.

Hvis flydefladen kun er stykkevis differentiabel, vil ϵ_i på en linie med manglende differentiabilitet kunne skrives som en positiv linearkombination af normalerne til flydefladen på hver side af singularitetslinien - med andre ord ϵ_i skal have en retning beliggende i vinkelrummet mellem normalerne til de to naboflader.

Gyldigheden af normalitetsbetingelsen kan bevises under visse forudsætninger, se for eksempel Lange-Hansen [75.1].

Det indre arbejde (dissipation) findes som:

$$W_i = \int_V \epsilon_i \sigma_i dv \quad (2.2.2)$$

Da $W_i \geq 0$, fås $\lambda \geq 0$.

2.3 Ekstremalprincipperne

Følgende definitioner indføres:

En statisk tilladelig spændingstilstand er en spændingstilstand, der opfylder ligevægtsbetingelserne og de statiske randbetingelser.

En statisk tilladelig spændingstilstand betegnes som sikker, hvis $f \leq 0$.

En kinematisk tilladelig brudfigur er en deformationstilstand, der opfylder kompatibilitetsbetingelserne og de geometriske randbetingelser. I zoner, hvor der sker plastiske deformationer, skal normalitetsbetingelsen være opfyldt.

Ekstremalsætningerne kan nu formuleres på følgende måde:

Nedreværdisætningen:

En konstruktion vil være i stand til at bære en belastning, hvis det er muligt at finde en sikker, statisk tilladelig spændingstilstand overalt i konstruktionen.

Øvre værdisætningen:

En konstruktion vil ikke være i stand til at bære en belastning, hvis der eksisterer en kinematisk mulig brudfigur, for hvilken det ydre arbejde bestemt ved arbejdsligningen er større end det indre arbejde.

Hvis der til en belastning kan findes både en sikker og statisk tilladelig spændingstilstand samt en kinematisk tilladelig brudfigur, er belastningen lig med konstruktionens flydelast og bæreevne.

For beviserne af øvre- og nedreværdisætningerne henvises til for eksempel Lange-Hansen [75.2].

2.4 Beton

Betonen regnes som et stift plastisk materiale, følgende Coulombs modificerede brudbetingelse.

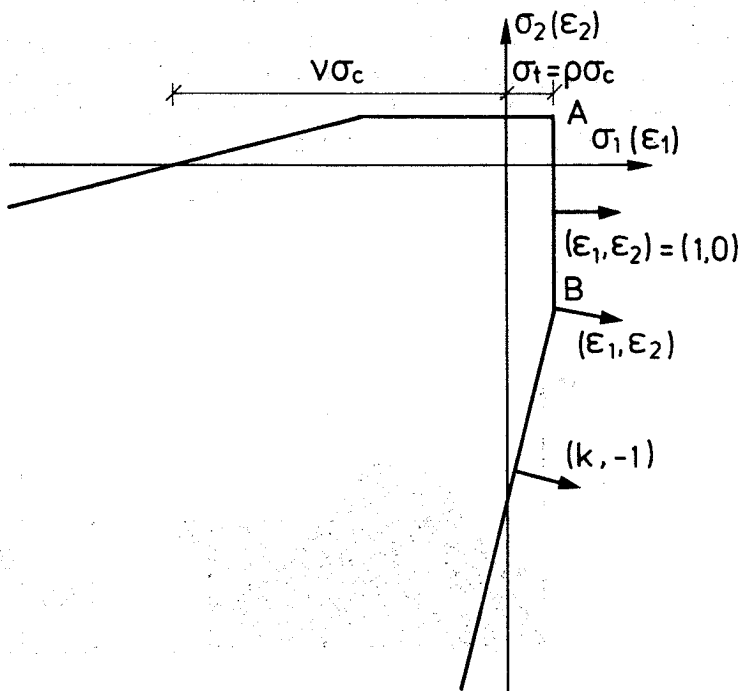


Fig.2.4.1: Coulombs modificerede brudbetingelse for beton, her vist for plan tøjningstilstand ($\epsilon_3 = 0$) .

På fig.2.4.1 betegner σ_c den på cylindre med diameter 150 mm og højde 300 mm målte trykstyrke.

$v\sigma_c$ er den enaksede plastiske trykstyrke, og $\sigma_t = \rho\sigma_c$ den tilsvarende enaksede plastiske trækstyrke. k sættes almindeligvis lig 4.

Begrundelsen for forskellen mellem de enaksede plastiske styrker og de i laboratoriet målte styrker er betonens deformationer ved brud, eller med andre ord, det faktum, at beton ikke er noget stift plastisk materiale. Ved "oversættelsen" af betons arbejdslinie til en idealplastisk arbejdslinie fremkommer de plastiske styrker så som beskrevet af Exner [79.1].

I korthed er princippet det, at man ønsker, at tøjningsenergien ved antagelse af idealplasticitet skal være den samme, som var fremkommet ved anvendelse af den målte arbejdskurve. Arealerne under kurve (1) og (2) på fig.2.4.2 skal altså være de samme.

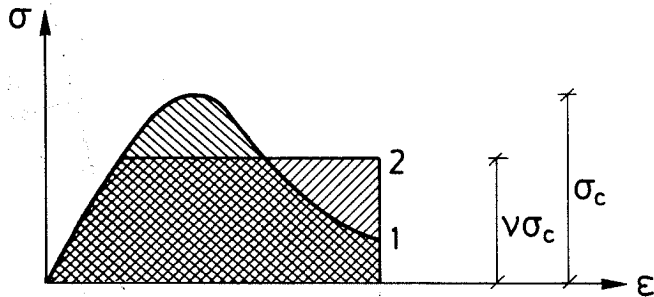


Fig.2.4.2: (1) Den målte arbejdskurve
(2) Den konstruerede plastiske arbejdskurve

2.5 Armering

Armeringen antages at være stift plastisk og kun i stand til at optage kræfter i sin egen akseretning; der ses altså bort fra eventuel dornvirkning.

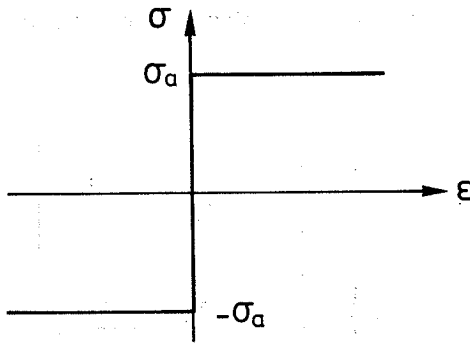


Fig.2.5.1: Stift plastisk arbejdskurve for armeringen

2.6 Flydeflader

I det følgende vil det indre arbejde i en flydeflade i en betonskive i plan tøjningstilstand med tykkelsen t blive udledt.

2.6.1 Betonen

I plan tøjningstilstand ($\epsilon_3 = 0$) kan Coulombs brudbetingelse skrives som, (se også fig.2.4.1):

$$f(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) = \begin{cases} \sigma_1 - \sigma_t = 0 \\ \frac{1}{2}\sigma_1(1 + \sin\varphi) - \frac{1}{2}\sigma_2(1 - \sin\varphi) - c \cos\varphi = 0 \end{cases} \quad (2.6.1.1)$$

hvor kohæsionen $c = v\sigma_c/2\sqrt{K} = v\sigma_c(1-\sin\varphi)/2\cos\varphi$.

Tilsvarende udtryk fås ved ombytning af σ_1 og σ_2 .

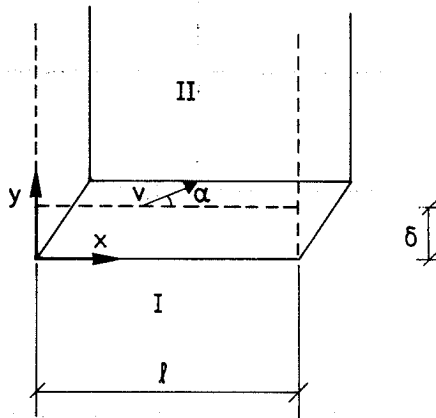


Fig.2.6.1.1: Flydezone mellem to stive dele

Betragtes en plan, homogen deformationstilstand i en zone med bredden δ mellem to stive dele I og II, finder vi (se fig.

2.6.1.1):

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{v \cos \alpha}{\delta} \cdot y \\ u_y &= \frac{v \sin \alpha}{\delta} \cdot y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{11} = 0 \\ \epsilon_{22} = \frac{v \sin \alpha}{\delta} \\ \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \frac{v \cos \alpha}{\delta} \end{cases}$$

Heraf findes så hovedtøjningerne:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{v}{2\delta} (\sin \alpha + 1) \\ \epsilon_2 &= \frac{v}{2\delta} (\sin \alpha - 1) \end{aligned} \quad (2.6.1.2)$$

Ved hjælp af fig.2.4.1 og (2.2.2) findes

For $\alpha = \frac{\pi}{2}$ fås ved hjælp af (2.6.1.2):

$$\epsilon_1 = \frac{v}{\delta}$$

$$\epsilon_2 = 0$$

Vi befinder os på strækningen AB på flydefladen, fig.2.4.1.

Det indre arbejde findes til:

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{v}{\delta} \sigma_t \ell \delta t \\ &= v \delta_t \ell t \end{aligned} \quad (2.6.1.3)$$

For $\varphi < \alpha < \frac{\pi}{2}$ fås, idet vi befinder os i punkt B på flydefladen, fig.2.4.1:

$$\begin{aligned} w_i &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{v}{\delta} (\sin \alpha + 1) \sigma_t + \frac{1}{2} \frac{v}{\delta} (\sin \alpha - 1) (\sigma_t k - v \sigma_c) \right\} \ell t \delta \\ &= \frac{1}{2} v \ell t \sigma_c \{ (1 + \sin \alpha) \rho - (1 - \sin \alpha) (\rho k - v) \} \end{aligned} \quad (2.6.1.4)$$

Indføres $k = 1 + \sin \varphi / 1 - \sin \varphi$, fås:

$$w_i = v \ell t \sigma_c \left\{ \frac{v}{2} (1 - \sin \alpha) + \rho \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \quad (2.6.1.5)$$

Indføres

$$\lambda = v - \rho(k-1)$$

$$\mu = v - \rho(k+1)$$

fås af (2.6.1.4):

$$w_i = \frac{1}{2} v \ell t \sigma_c (\lambda - \mu \sin \alpha) \quad (2.6.1.6)$$

For $\alpha = \varphi$ fås, idet vi befinder os på strækningen BC på flydefladen, fig.2.4.1:

$$w_i = \left\{ \frac{1}{2} \frac{v}{\delta} (\sin \varphi + 1) \sigma_t + \frac{1}{2} \frac{v}{\delta} (\sin \varphi - 1) (\sigma_t k - v \sigma_c) \right\} \ell t \delta$$

Indføres $k = 1 + \sin \varphi / 1 - \sin \varphi$, fås:

$$w_i = \frac{1}{2} v \ell t v \sigma_c (1 - \sin \varphi) \quad (2.6.1.7)$$

Da flydezonens tykkelse δ ikke indgår i (2.6.1.3), (2.6.1.5) (2.6.1.6) og (2.6.1.7), kan man lade $\delta \rightarrow 0$ og dermed indføre de regningsmæssigt bekvemme flydeflader eller flydelinier.

Dissipationen pr. arealenhed i en flydeflade kan altså skrives som, idet $\alpha < \varphi$ ikke kan forekomme på grund af normalitetsbetingelsen.

For $\alpha = \varphi$: $w_i = \frac{1}{2} v (1 - \sin \varphi) v \sigma_c$

For $\varphi < \alpha < \pi/2$:

$$w_i = v \sigma_c \left\{ \frac{v}{2} (1 - \sin \alpha) + \rho \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

eller

$$w_i = \frac{1}{2} v \sigma_c (\lambda - \mu \sin \alpha)$$

Her er

$$\lambda = v - \rho(k-1)$$

$$\mu = v - \rho(k+1)$$

For $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$w_i = v \rho \sigma_c$$

(2.6.1.8)

2.6.2 Armeringen

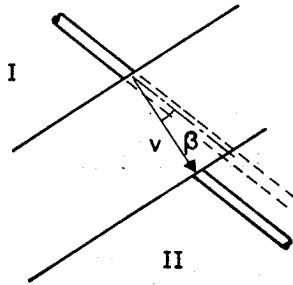


Fig.2.6.2.1: Flydefflade krydsende et armeringsjern

Det indre arbejde i den armering, der krydser en flydefflade, bliver under de i kapitel 2.5 nævnte forudsætninger:

$$w_i = v \cos \beta A_a \sigma_a \quad (2.6.2.1)$$

hvor β er vinklen mellem flytningen og armeringens akseretning, A_a er arealet af den krydsende armering, og σ_a er armeringens flydespænding.

3. DET LOKALE BRUD OMKRING ET JERN

Ved skitseringen af brudfigurer og beregning af bæreevner er der brug for en model af de forkammede armeringsjern.

Den her anvendte model for et forkammet jern ser ud som vist på fig.3.1.

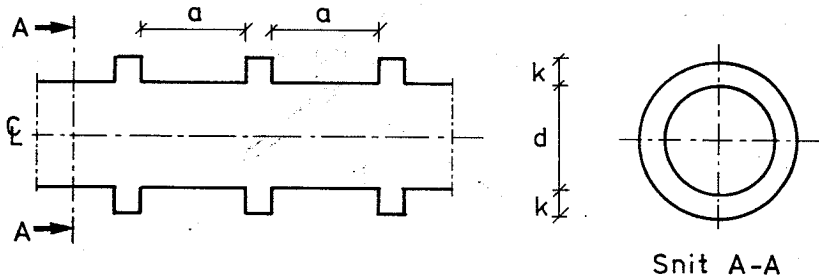


Fig.3.1: Model for forkammet armeringsjern

Geometrien beskrives af diameteren d , der sættes lig med den nominelle diameter på de virkelige jern, kamhøjden k , som regnes som jernenes gennemsnitlige kamhøjde og kamafstanden a . Kammenes udstrækning i akseretningen indgår ikke i modellen.

3.1 Rotationssymmetrisk brud omkring et forkammet armeringsjern

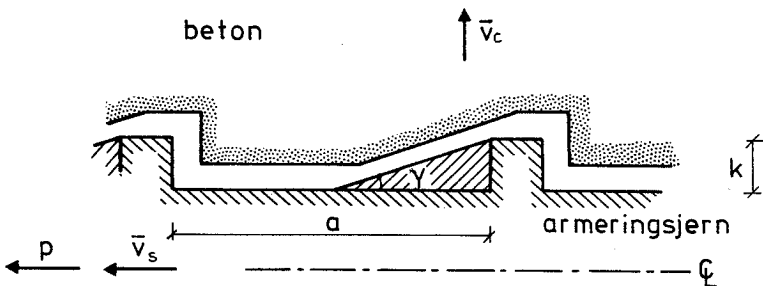


Fig.3.1.1: Brud omkring de enkelte kamme

Bruddet foregår på den måde, at mens kraften P trækker armeringsjernet i \bar{v}_s 's retning, presser de viste betonkiler den omgivende beton rotationssymmetrisk bort fra jernet. På fig.3.1.1 er flytningen af betonen vist som \bar{v}_c .

Ved beregningen af det indre arbejde i flydefladerne antages det, at der ikke udføres noget arbejde i den del af flydefladen, der forløber i skillefladen mellem beton og armeringsjern; der ses altså bort fra adhæsionen mellem beton og stål.

Dette medfører blandt andet, at kammenes udstrækning i jernets længderetning ikke kommer til at indgå i modellen.

Med de på fig.3.1.1 anvendte betegnelser bliver den relative bevægelse mellem den omgivende beton og armeringsjernet.

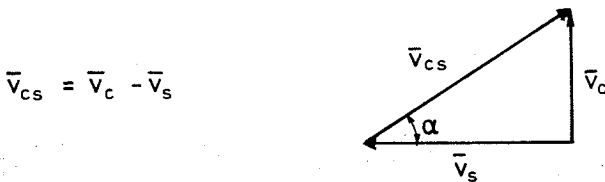


Fig.3.1.2: Den relative bevægelse mellem beton og armering

Betegnes vinklen mellem \bar{v}_{cs} og \bar{v}_c med α , bliver det ydre arbejde:

$$w_e = P \cdot |\bar{v}_{cs}| \cos \alpha$$

Det indre arbejde bliver, idet der i denne omgang ses bort fra bidraget fra splitningen af den omgivende beton:

For $\gamma \geq \text{Arc tan } \left(\frac{k}{a}\right)$:

$$w_i = \left| \bar{v}_{cs} \right| (d+k) \pi \frac{k}{\sin \gamma} \frac{l}{a} \cdot$$

$$\cdot \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right\}$$

For $0 \leq \gamma \leq \text{Arc tan } \left(\frac{k}{a}\right)$:

$$w_i = \left| \bar{v}_{cs} \right| (d+2k-a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \gamma} \frac{l}{a} \cdot$$

$$\cdot \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right\}$$

(3.1.1)

Betegnelserne er igen hentet fra fig.3.1.1, idet udtrykket for det indre arbejde i en flydeflade (2.6.1.8) er anvendt.

Sættes det ydre arbejde lig med det indre, fås:

For $\gamma \geq \text{Arc tan } \left(\frac{k}{a}\right)$:

$$\frac{P}{l d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{(d+k)k}{d a \cos \alpha \sin \gamma} \left\{ v \frac{1 - \sin(\alpha - \gamma)}{2} + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right\}$$

(3.1.

For $0 \leq \gamma \leq \text{Arc tan } \left(\frac{k}{a}\right)$:

$$\frac{P}{l d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{(d+2k-a \tan \gamma)}{d \cos \gamma \cos \alpha} \left\{ v \frac{1 - \sin(\alpha - \gamma)}{2} + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right\}$$

Den bedste øvreværdi findes herefter ved at minimalisere (3.1.2) med hensyn til α og γ .

Splitningen af den omgivende beton og flydning i bøjler eller anden form for tværarmering vil give et bidrag til bæreevnen (3.1.2) bestående af en eller anden konstant C gange $\tan \alpha$.

Benyttes det andet dissimationsudtryk i (2.6.1.8) fås

For $\gamma \geq \text{Arc tan } \left(\frac{k}{a}\right)$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{(d+k)k}{2da} \frac{\lambda - \mu \sin(\alpha - \gamma)}{\cos \alpha \sin \gamma} + C \tan \alpha$$

For $0 \leq \gamma \leq \text{Arc tan } \left(\frac{k}{a}\right)$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{d+2k - a \tan \gamma}{2d} \frac{\lambda - \mu \sin(\alpha - \gamma)}{\cos \gamma \cos \alpha} + C \tan \alpha$$

(3.1.3)

I det følgende benyttes:

$$D = \frac{(d+k)k}{2da}$$

$$F = \frac{d+2k}{2d}$$

$$\text{sam} \quad u = (\alpha - \gamma) \quad , \quad \alpha = u + \gamma$$

Heraf fås:

For $\gamma \geq \text{Arc tan } \left(\frac{k}{a}\right)$:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = D \frac{\lambda - \mu \sin u}{\cos(u + \gamma) \sin \gamma} + C \tan(u + \gamma)$$

For $0 \leq \gamma \leq \text{Arc tan } \left(\frac{k}{a}\right)$:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = (F - \frac{a}{2d} \tan \gamma) \frac{\lambda - \mu \sin u}{\cos \gamma \cos(u + \gamma)} + C \tan(u + \gamma)$$

(3.1.4.)

Først betragtes situationen for $\gamma \geq \text{Arc tan} \left(\frac{k}{a} \right)$.

Sættes $u = (\alpha - \gamma) = \varphi$ som er det mindst tilladelige ifølge afsnit 2.6.1 fås:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = Dv (1 - \sin \varphi) \frac{1}{\sin \gamma \cos(u + \gamma)} + C \tan(u + \gamma) \quad (3.1.5)$$

Differentieres med hensyn til γ findes følgende minimum:

$$\cot \gamma = \tan \varphi + \sqrt{1 + \tan^2 \varphi + \frac{C}{Dv \cos \varphi (1 - \sin \varphi)}} \quad (3.1.6)$$

Differentieres dernæst (3.1.4) med hensyn til u og indsættes $u = \varphi$ findes:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\tau}{\sigma_c} \right)_{u=\varphi} = \frac{D [\lambda \cos \varphi + (\lambda \sin \varphi - \mu) \cot \gamma] + C}{\cos^2(u + \gamma)} \quad (3.1.7)$$

Størrelsen af den kantede parentes i (3.1.7) undersøges ved at differentiere parentesen med hensyn til parameteren ρ i betonens brudbetingelse (se afsnit 2.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} [(v - \rho(k-1)) \cos \varphi + ((v - \rho(k-1)) \sin \varphi - (v - \rho(k+1))) \cot \gamma] \\ = \frac{4k}{k+1} \left(\cot \gamma - \frac{k-1}{4\sqrt{k}} \right) > 0 \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

hvor k her betegner konstanten i betonens brudbetingelse.

$\cot \gamma$ antager sin mindste værdi for $C = 0$, hvor

$$\cot \gamma = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \sqrt{k} \quad (3.1.9)$$

Det vil sige (3.1.8) altid er opfyldt.

Den kantede parentes i (3.1.7) antager altså sin mindsteværdi for $\rho = 0$.

Sættes $\rho = 0$ i (3.1.7) og indsættes minimumsbetingelsen (3.1.6) fås efter en del regnearbejde at

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\tau}{\sigma_c} \right)_{u=\varphi} \geq 0$$

$$\text{for } \sqrt{1 + \frac{C}{Dv}} \sqrt{k} \leq 1 + \frac{C}{Dv} \sqrt{k} \quad (3.1.10)$$

(3.1.10) er opfyldt for alle $C \geq 0$.

Minimum for (3.1.4), når $\gamma \geq \text{Arc tan} \left(\frac{k}{a} \right)$, fås altså altid for $u = \varphi \Leftrightarrow (\alpha - \gamma) = \varphi$ og γ bestemt ved (3.1.6).

Benyttes $\varphi = 37^\circ$, ($k = 4$) fås følgende bæreevneudtryk:

Brudform 1:

$$\cot \gamma = \frac{1}{4} (3+5 \sqrt{1+2 \frac{C}{Dv}}) \quad (3.1.11)$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = Dv \frac{0.8}{\sin(\varphi+2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi+\gamma) \quad (3.1.12)$$

eller:

$$\frac{\tau}{Dv\sigma_c} = \frac{0.8}{\sin(\varphi+2\gamma) - 0.6} + \frac{C}{Dv} \tan(\varphi+\gamma) \quad (3.1.13)$$

Det er således kun betonens friktionsvinkel φ , der indgår i udtrykket for $\frac{\tau}{Dv\sigma_c}$.

For $C = 0$ fås ved hjælp af (3.1.11 - 13)

$$\cot \gamma = 2, \quad \gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = 2 Dv$$

$$\text{eller } P = \frac{\rho}{a} (d+k) k \pi v \sigma_c \quad (3.1.14)$$

Dette svarer til et tryk $v \sigma_c$ på kammene fra betonen. $C = 0$ er den eneste situation, hvor betonens plastiske trækstyrke udtrykt ved parameteren ρ har nogen indflydelse, idet $\rho = 0$ medfører at vinklen $u = (\alpha - \gamma)$ kan være vilkårlig. Bæreevnen er dog stadig bestemt ved (3.1.14), så forholdet er uden større interesse.

Dernæst betragtes bruddet når $0 \leq \gamma \leq \text{Arc tan } (\frac{k}{a})$.

Af det følgende fremgår at minimum for (3.1.4) findes for $\gamma = 0$. (3.1.4) bliver herefter til:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = F \frac{\lambda - \mu \sin u}{\cos u} + C \tan u \quad (3.1.15)$$

Differentieres med hensyn til u findes minimum for:

$$\sin u = \frac{\mu - \frac{C}{F}}{\lambda} \quad (3.1.16)$$

Kravet $u \geq \varphi$ medfører:

$$C \leq F(\mu - \lambda \sin \varphi) = \frac{2Fv}{k+1} (1 - 2 \frac{\rho}{v} k) \quad (3.1.17)$$

hvor k her betegner konstanten i betonens brudbetingelse.

For større C -værdier er $u = \varphi$. Heraf fås:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\sigma_c} &= Fv \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} + C \tan \varphi \\ &= \frac{Fv}{\sqrt{k}} + C \tan \varphi \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Indsættes (3.1.16) i (3.1.15) fås efter nogle omskrivninger, idet $k = 4$:

Brudform 2 a:

$$\frac{C}{Dv} < \frac{2}{5} \frac{F}{D} (1 - 8 \frac{\rho}{v})$$

$$\left(\frac{\tau}{\sigma_c}\right)^2 + (C - F\mu)^2 = (F\lambda)^2 \quad (3.1.19)$$

eller

$$\left(\frac{\tau}{Dv\sigma_c}\right)^2 + \left(\frac{C}{Dv} - \frac{F\mu}{Dv}\right)^2 = \left(\frac{F\lambda}{Dv}\right)^2 \quad (3.1.20)$$

Brudform 2 b:

$$\frac{2}{5} \frac{F}{D} (1 - 8 \frac{\rho}{v}) \leq \frac{C}{Dv}$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C \quad (3.1.21)$$

$$\frac{\tau}{Dv\sigma_c} = \frac{1}{2} \frac{F}{D} + \frac{3}{4} \frac{C}{Dv} \quad (3.1.22)$$

Herefter refterer at vise at minimum for brudformen beskrevet ved (3.1.4), (tilf.2) findes for $\gamma = 0$.

Differentieres (3.1.4) tilf. 2 med hensyn til γ og sættes $\gamma = 0$ fås.

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\tau}{\sigma_c}\right)_{\gamma=0} = \frac{(\lambda - \mu \sin u)(F \sin u - \frac{a}{2d} \cos u) + C}{\cos^2 u} \quad (3.1.23)$$

For $\frac{C}{Dv} < \frac{2}{5} \frac{F}{D} (1 - 8 \frac{\rho}{v})$ findes ved hjælp af (3.1.16) følgende udtryk for tælleren T i (3.1.23) udtrykt ved vinklen u .

$$T = F\mu \cos^2 u - \frac{a}{2d} \cos u (\lambda - \mu \sin u) \quad (3.1.24)$$

Betingelsen $T > 0$ medfører:

$$\frac{a}{2dF} = \frac{a}{d+2h} < \mu \frac{\cos u}{\lambda - \mu \sin u} \quad (3.1.25)$$

Højresiden i (3.1.25) antager et minimum for $u = \varphi$, hertil svarer:

$$\frac{a}{d+2k} < \sqrt{k} \frac{\mu}{v} = 2(1 - 5 \frac{\rho}{v}) \quad (3.1.26)$$

For $\frac{2}{5} \frac{F}{D} (1 - 8 \frac{\rho}{v}) \leq \frac{C}{Dv}$ er $u = \varphi$, det vil sige T vokser med voksende C -værdier.

I tabel 3.1.1 er angivet dimensionerne og de dertil hørende dimensionsløse parametre for de idet følgende benyttede armeringstyper.

	K 10	K 14	T 10	T 14	SK 16
d [mm]	10	14	10	14	16
a [mm]	8	10.5	8.5	11.1	8.5
k [mm]	0.9	1.2	0.61	0.91	1.1
a/k	8.9	8.8	13.9	12.2	7.7
D	0.061	0.062	0.038	0.044	0.069
F	0.59	0.59	0.56	0.57	0.57
$\frac{a}{d+2k}$	0.68	0.64	0.76	0.70	0.47

Tabel 3.1.1 Armeringsparametre.

Betegnelserne står for:

dansk kamstål 42	ϕ 10 mm, K 10
	ϕ 14 mm, K 14
dansk tentorstål	ϕ 10 mm, T 10
	ϕ 14 mm, T 14
svensk kamstål 60	ϕ 16 mm, SK 16

Det af Jensen [80.2] benyttede kamstål 90 har samme kamgeometri som kamstål 60.

I tabel 3.1 er $\frac{a}{d+2k} \leq 0.76$, jævnfør 3.1.26 svarende til $\rho < 0.12v$. Denne betingelse er opfyldt overalt i det følgende.

I den første brudform må betonkilerne ikke nå den næste kam, det vil sige $\cot \gamma < \frac{a}{k}$. I tabel 3.1.2 er $\cot \gamma$ beregnet ved hjælp af (3.1.11). Ved sammenligning med tabel 3.1.1 ses dette krav at være opfyldt overalt.

$\frac{C}{Dv}$	0	4	8	12
$\cot \gamma$	2.0	4.5	5.9	7.0

Tabel 3.1.2 $\cot \gamma$ efter (3.1.11)

Afbildes bæreevnen $\frac{\tau}{Dv\sigma_c}$ som funktion af modstanden mod tværuddvidelse $\frac{C}{Dv}$ når $\tan \phi = \frac{3}{4}$ og $\rho = 0$ fremkommer fig. 3.1.3.

Brudform 2 b afbildes i parallelle rette linier. Brudform 2 a afbildes i cirkler med centrum i $(\frac{F_H}{Dv}, 0)$ og radius $\frac{F_V}{Dv}$. Cirklerne tangerer de rette linier i punkter, der ligger på en ret linie gennem (o.o) med en hældning:

$$2 \frac{1-3 \frac{\rho}{v}}{1-8 \frac{\rho}{v}} \quad (3.1.27)$$

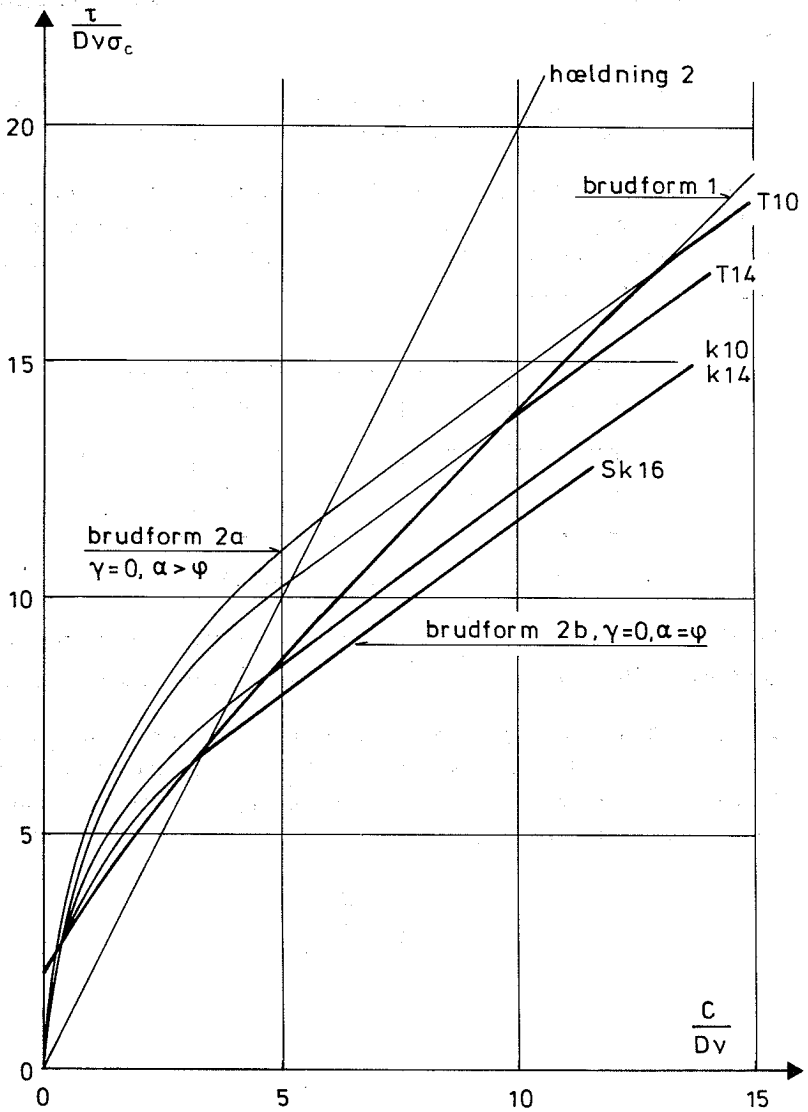


Fig. 3.1.3 Bæreevnen $\frac{\tau}{Dv\sigma_c}$ som funktion af tværudvidelsesmodstanden $\frac{c}{Dv}$, optegnet for $\tan\varphi = \frac{3}{4}$ og $\rho = 0$.

Cirklerne er de eneste på figur 3.1.3 der afhænger af ρ . $\rho > 0$ vil medføre at cirklerne rykkes længere op (se fig. 3.1.4).

Brudform 1 er ligeledes vist på fig. 3.1.3.

På fig. 3.1.4 er som på fig. 3.1.3 vist $\frac{\tau}{Dv\sigma_c}$ som funktion af $\frac{C}{Dv}$ for Svensk kamstål 16 (SK 16), forholdet $\frac{\rho}{v}$ er varieret.

Det ses at brudform 2 a normalt ikke vil forekomme. Brudform 2 a er derfor heller ikke medtaget ved udledningen af øvreverdierne i afsnit 4 og i appendix.

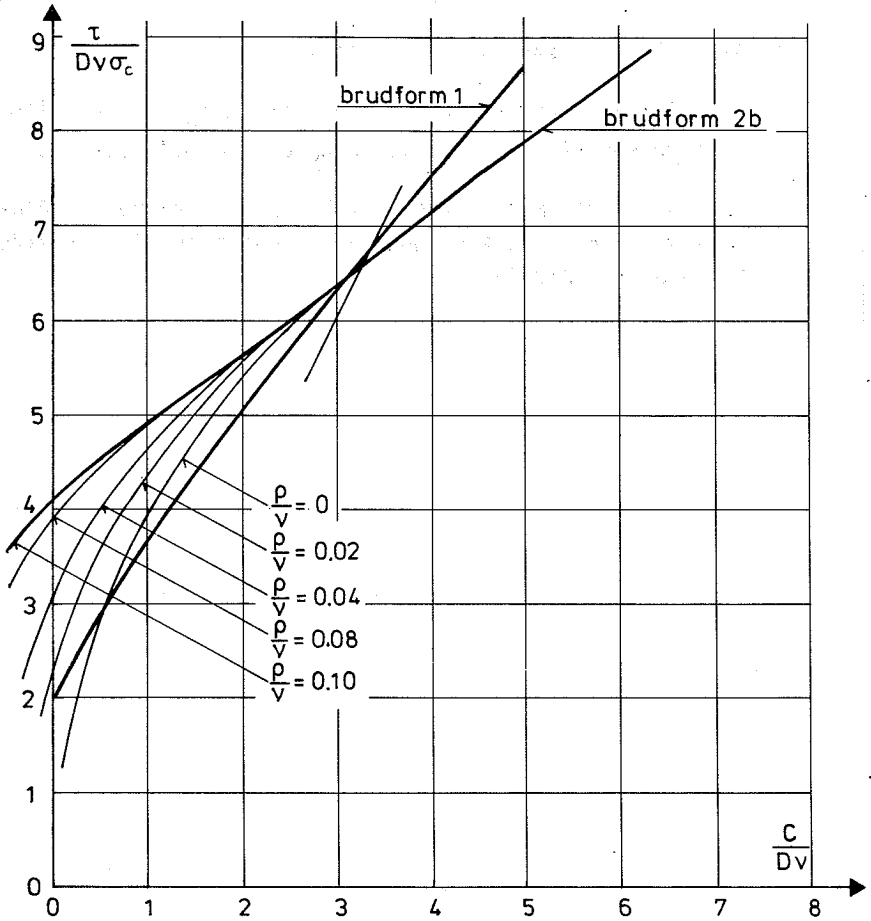


Fig. 3.1.4 Bæreevnen $\frac{\tau}{Dv\sigma_c}$ som funktion af $\frac{c}{Dv}$ for SK 16 forholdet $\frac{\rho}{v}$ er varieret.

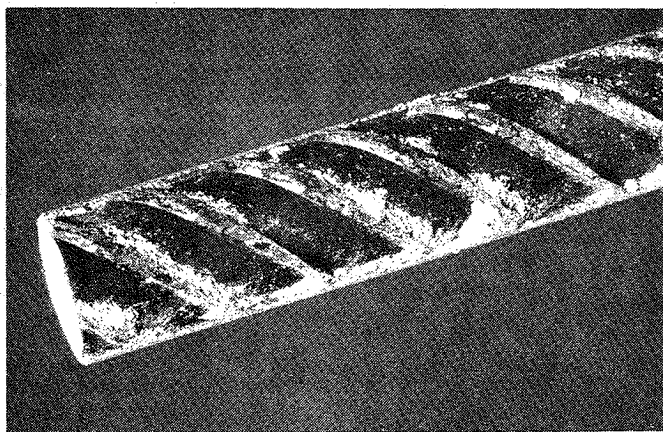
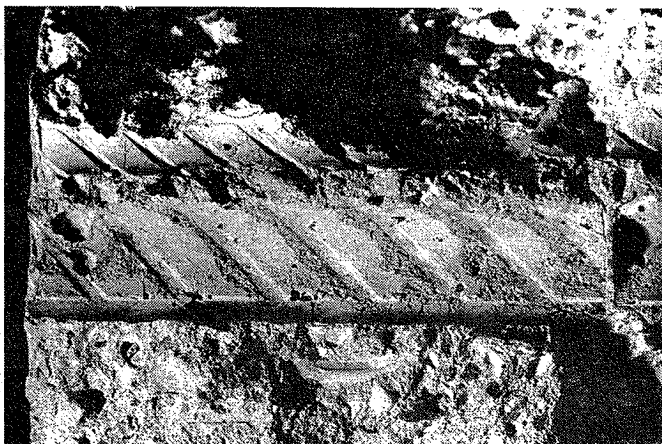


Fig. 3.1.5: Fra nogle forsøg med forankring af kamstål ses her den lokale brudfigur omkring kammene når C er lille. Øverst ses bruddet i betonen og nederst ses brudfladen foran kammene.

Forsøgene er nærmere omtalt i Hess et.al. [80.1].

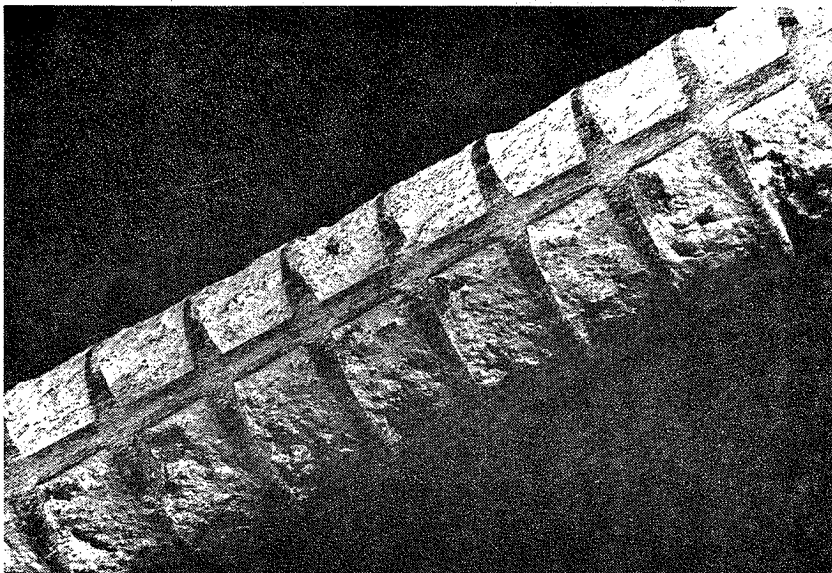


Fig.3.1.6: Fra nogle forsøg med forankring af kamstål ses her brudfladen i betonen mellem kamme-
ne, når C er stor.
Forsøgene er nærmere omtalt i Hess et al.
[80.1].

3.2 Prøvelegeme efter Dansk Standard, DS 2082

Dansk Standard, DS 2082 [78.2], foreskriver til prøvning af den relative forankringsevne for armeringsstål udført forsøg med et prøvelegeme som vist på fig.3.2.1.

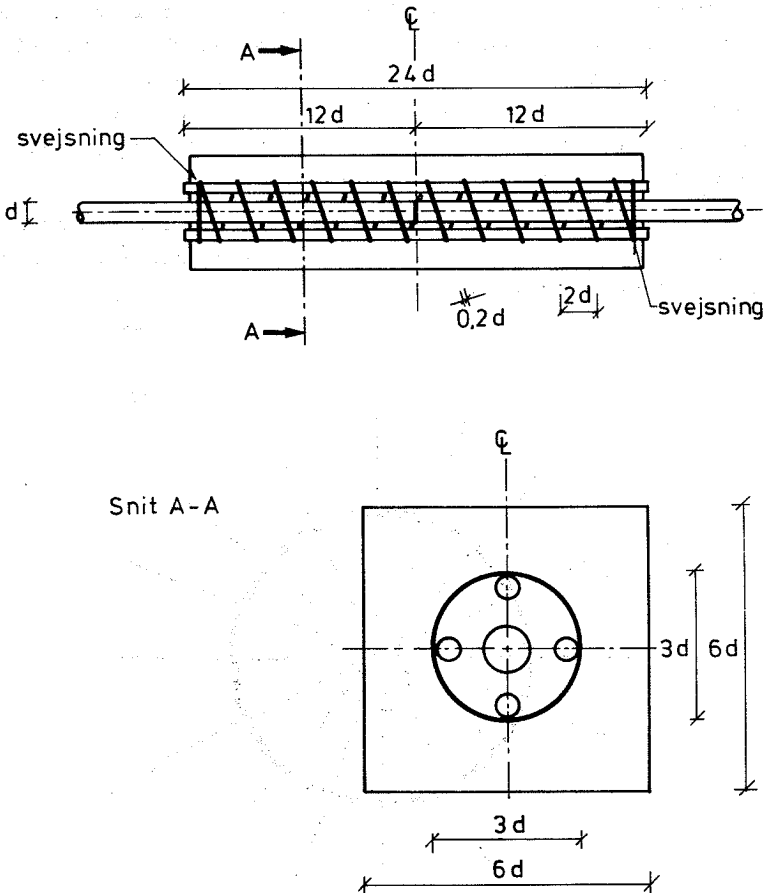


Fig.3.2.1: Prøvelegeme ifølge DS 2082

Prøvningen foregår ved, at der dels udføres forsøg med det aktuelle armeringsstål, dels med et gevindskåret stål med samme nominelle diameter. Den relative forankringsevne ζ fremkommer så som forholdet mellem udtrækningskraften for armeringsstålet og udtrækningskraften for det gevindskårne stål.

Prøvelegemet består af to stykker armeringsstål (hovedjernene) placeret i forlængelse af hinanden. Hovedjernene er omgivet af mindst 4 såkaldte stødjern og en spiralarmering. Der er i standarden ikke forudsat noget om stødjernene udover, at de skal bestå af mindst 4 forkammede jern, der i flydning samlet skal kunne optage en kraft større end udtrækningskraften. Spiralen skal have de på fig.3.2.1 angivne dimensioner og være fremstillet af "almindelig glat tråd uden specielle krav til stålqualiteten".

Prøvelegemet er meget nær rotationssymmetrisk. Det falder derfor naturligt at afprøve øvreværdiløsningen fra afsnit 3.1 på forsøg med standardens prøvelegeme.

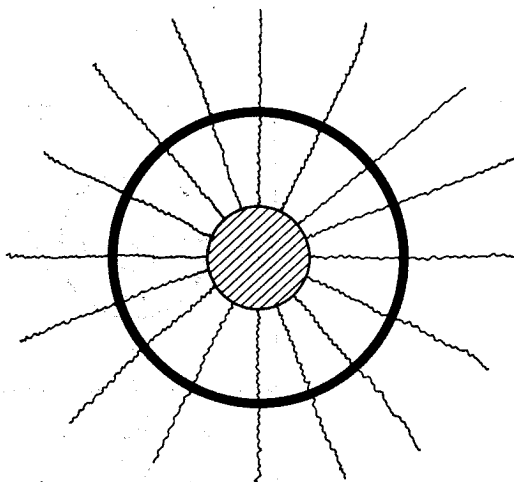


Fig.3.2.2: Radiære brudlinier omkring et armeringsjern omgivet af en cirkulær bøjle

Ved udledningen af øvre værdien for det lokale brud omkring et forkammet jern blev det antaget, at den omgivende beton bevægede sig rotationssymmetrisk bort fra jernet. Idet flytningen sættes lig med 1 (\bar{v}_{cs} i afsnit 3.1), findes tøjningen i de radiære brudlinier:

$$\epsilon_r = \frac{\sin \alpha}{r}$$

Vi finder derfor bidraget til det indre arbejde fra bøjlerne og den omgivende beton til:

$$w_i = \frac{\sin \alpha}{r} \cdot 2\pi r (\sigma_a \cdot A_a + \sigma_t \cdot c \cdot l)$$

hvor σ_a er bøjlernes flydespænding, A_a er bøjlernes samlede tværsnitsareal (det totale bøjleareal, som skæres af en enkelt brudlinie), σ_t er igen betonens plastiske trækstyrke, c dæklagets tykkelse og l forankringens længde.

Herefter fås med samme betegnelser som i afsnit 3.1

$$C = \frac{2\sigma_a A_a}{l d \sigma_c} + \frac{2c}{d} \rho$$

$$= \psi + 2\rho \frac{c}{d}$$

$$\text{idet } \psi = \frac{2\sigma_a A_a}{l d \sigma_c}$$

Med den aktuelle geometri fås:

$$C = \psi + 5\rho$$

Af fig. 3.2.1 ses at $\frac{C}{Dv} \geq 3 \Rightarrow C > 0.03 \Rightarrow \psi > 0$ for Dansk Ks 56 S. Ø25 mm medfører brudform 2b.

Ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner er der udført forsøg, Hess [80.1], med forsøgsemner meget lig standardprøveemnet. Den primære variabel ved disse forsøg var tværarmeringens udformning og mængde.

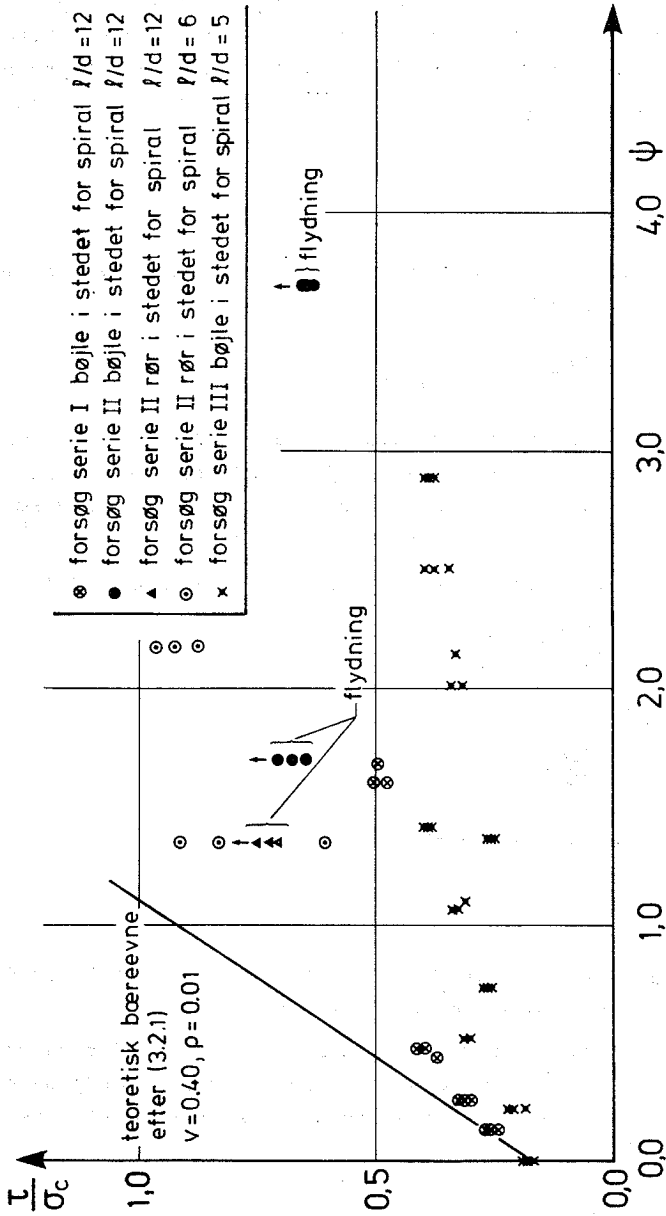


Fig.3.2.3: Forsøg med modificerede standardprøvelegemer, fra [80.1]

Fig.3.2.3 viser samtlige resultater fra disse forsøg samt den teoretiske bæreevne, jf (3.2.1). Vi har her sat $\nu = 0.40$ og $\rho = 0.01$.

Forsøgene i serie I og II blev udført med svensk Ks56S Ø20 og forsøgene i serie III med dansk Ks56S Ø25

	d[mm]	a[mm]	k[mm]	a/k	D	F	$\frac{a}{d \cdot 2k}$
Svensk Ks56S Ø20	20	9,6	1,3	7,4	0,072	0,57	0,43
Dansk Ks56S Ø25	25	20	1,1	18,2	0,029	0,54	0,74

Tabel 3.2.1 Armeringsparametre for forsøgene i [80.1]

Som nævnt i [80.1] er resultaterne af en meget stor del af forsøgene af meget tvivlsom karakter. Man bør således først og fremmest hæfte sig ved, at det er muligt at forankre et forkammet jern, så $\tau \approx \sigma_c$. Derudover må det nok konstateres, at overensstemmelsen mellem teori og forsøg ikke er særlig god. Dog bør det bemærkes, at hældningen på den teoretiske kurve ikke skal ændres ret meget for at få en bedre overensstemmelse. Hældningen svarer til $\tan\phi$ ($\tan\phi = 3/4$, $\phi \approx 37^\circ$). En mulig forklaring på den manglende overensstemmelse kunne således være en mindre ϕ , når de hydrostatiske spændinger er store. Eller man kunne overveje om normalitetsbetingelsen virkelig er gældende. Dette er dog ikke formålet med denne rapport.

3.3. Kamhøjdens indflydelse

Ses igen på øvreværdien for bruddet omkring et jern, (3.1.3), kunne det være af interesse at undersøge modellens følsomhed over for ændringer i det forkammede jerns geometri, og her i første omgang kamhøjden.

I afsnit 3.1 fandtes, at hvis tværarmeringen og/eller dimensionerne af den omgivende beton havde en vis størrelse ($C > 0.1$), kunne der findes en mindste øvreværdi svarende til $\alpha = \phi$ og $\gamma = 0$ i (3.1.3). Kravet til C er ikke særlig skrap. I eksemplet med prøvelegemet fra DS 2082 vil alene bidraget fra dæklaget $2c/d \rho$, se (3.2.1) med $\rho = 0.01$, give $C = 0.05$.

Indsættes $\alpha = \varphi$ og $\gamma = 0$ i (3.1.3), fås:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = (1 + 2 \frac{k}{d}) \cdot \frac{v}{4} + \frac{3}{4} C \quad (3.3.1)$$

Normalt er $k/d \approx 0.1$. Dette gælder også for dansk kamstål og de mindste dimensioner af tentorstål. For de større dimensioner tentorstål er $k/d \approx 0.05$. Sættes $v = 0.40$ og $C = 0.1$, fås:

	$\frac{k}{d}$	$\frac{\tau}{\sigma_c} = (1 + 2 \frac{k}{d}) \frac{v}{4} + \frac{3}{4} C$	relativ $\frac{\tau}{\sigma_c}$
Kamstål og små diametre tentorstål	0.2	$0.140 + 0.075 = 0.215$	1.10
	0.1	$0.120 + 0.075 = 0.195$	1
Øvrige tentorstål	0.05	$0.110 + 0.075 = 0.185$	0.95
	0.025	$0.105 + 0.075 = 0.180$	0.92

Tabel 3.3.1: Bæreevne τ/σ_c ved forskellige kamhøjder k/d

Til sammenligning kan det nævnes, at DS 411 [73.2] angiver den relative forankringsevne for tentorstål som $0.8/0.9 = 0.89$, hvis forankringsevnen for kamstål sættes til 1. Modellen her giver, jf tabel 3.3.1, 0.95.

Rehm [61.1] angiver, at brudværdien for forankringer bedømt ud fra hans forsøg ikke bliver påvirket hverken af ændringer i kamhøjden eller kamafstanden. Lutz [66.1] skriver, at en 100%'s forøgelse af kamhøjden kun resulterer i en 13%' forøgelse af forankringsstyrken.

Soretz & Hölzenbein [79.2] foretog forsøg med forkammede jern, hvor kamhøjden var henholdsvis $0.1d$, $0.05d$ og $0.025d$. De fandt, at bæreevnen for de to førstnævnte praktisk talt var uændret, hvorimod bæreevnen for det sidste jern var ca 20% mindre end for de andre.

Billedet af kamhøjdens indflydelse på bæreevnen er således ikke entydigt. Dog synes den her omtalte models beskedne følsomhed over for ændringer i kamhøjden på rimelig vis at stemme overens med det i litteraturen angivne.

Det anføres ofte i litteraturen, dels at bruddet omkring kammene, dels forankringens stivhed, skifter karakter, når kammens stigningsvinkel v bliver mindre end ca 40° .

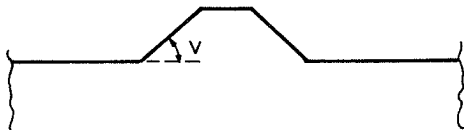


Fig.3.3.1: Snit i armeringsjern med kam

Der kan for eksempel henvises til Lutz [66.1], Tepfers [73.1] og Soretz & Hölzenbein [79.2]. Lutz formulerer det på følgende måde: "En kam med en stigningsvinkel på mindre end 30° - 40° vil glide i forhold til den omgivende beton, medens kamme med en stigningsvinkel på 40° - 45° eller mere opnår al deres bevægelse ved knusning i betonen foran kammen". Med andre ord, betonstrukturen optræder først, når stigningsvinklen er større end 40° - 45° .

Lad os sammenligne de ovenfor nævnte observationer med den her benyttede model og dens forudsætninger. I betonen antages plan deformationstilstand, og brudlinier i grænsefladen mellem beton og armeringsjern antages som før nævnt ikke at bidrage til det indre arbejde.

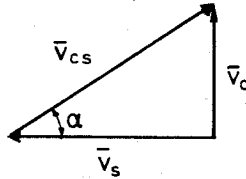


Fig.3.3.2: Den relative bevægelse mellem beton og armering

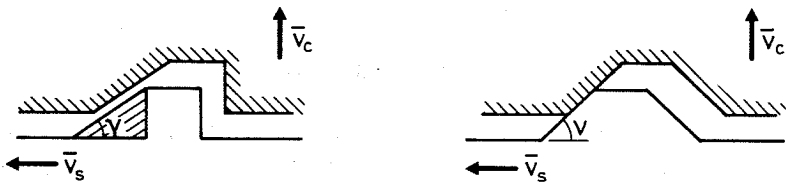


Fig.3.3.3: Betonbrud omkring kam og glidning i overgangen beton/armering

I tilfældet til venstre på fig.3.3.3 er der brud i betonen, og der gælder derfor $\alpha - \gamma \geq \varphi$. I tilfældet til højre glider betonen på den skrå kam, og vi har $\alpha - \nu \geq 0$.

Antages begge typer armeringsjern indstøbt i beton, således at tværarmering eller dæklag bevirker, at C i (3.1.3) er større end 0.1, vil udtrækning af det venstre jern foranledige et betonbrud, hvor $\gamma = 0$ og $\alpha = \varphi$ som fundet i afsnit 3.1.

Trækkes det højre jern til brud, fås:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = C \cdot \tan \alpha$$

Minimum fås for $\alpha = v$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = C \cdot \tan v$$

Når $v = \varphi$, bliver de to jerns bæreevne ens på nær betonbidraget foran kammene.

Afhængig af C vil - hvis v varieres - glidningen på kammene på et tidspunkt give et mindre indre arbejde end et betonbrud mellem kammene.

Antages $C \approx 0.2-0.3$, vil glidning på kammene give det mindste indre arbejde, når v er mindre end ca 50° .

$C \approx 0.2$ svarer så nogenlunde til betingelserne i forsøgene hos Lutz [66.1].

Modellen giver altså også en rimelig forklaring på, hvorfor forankringsbruddet skifter karakter, når stigningsvinklen på kammene nærmer sig $40-50^\circ$.

3.4 Forankring af armeringsjern i ikke-rotationssymmetriske betonlegemer

I de forrige afsnit så vi, at den foreslåede øvreværdi var i stand til på rimelig vis at forklare en del af de problemer, der knytter sig til forankringen af forkammede armeringsjern. De betragtede eksempler var alle tilnærmelsesvis rotationssymmetriske. De rotationssymmetriske forankrings- og stødproblemer udgør imidlertid kun en uhyre lille del af det samlede antal stød og forankringer.

Ser vi igen på det rotationssymmetriske tilfælde med en ringarmring som tværarmring, og antages det, at den omgivende beton rev-

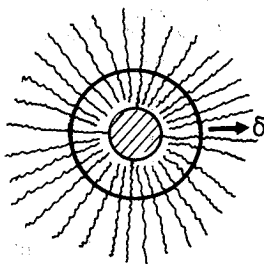


Fig.3.4.1: Brud omkring jern - uendelig mange revner

ner efter uendelig mange radiære snit, findes ringarmeringens bidrag til det indre arbejde som:

$$w_i = 2\pi \delta \sigma_a A_a \approx 6.28 \delta \sigma_a A_a$$

Antages, at den omgivende beton kun revner efter 8 snit, fås:

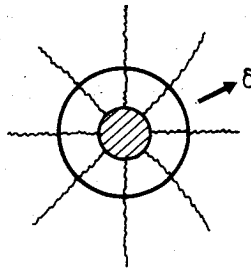


Fig.3.4.2: Brud omkring jern - 8 revner

$$w_i = 8 \cdot 2 \sin 22.5^\circ \delta \sigma_a A_a$$

$$\approx 6.12 \delta \sigma_a A_a$$

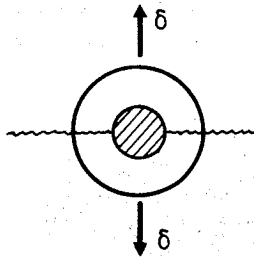


Fig.3.4.3: Brud omkring jern - 2 revner

Antages, at den omgivende beton kun revner efter 2 snit, fås:

$$w_1 = 2 \cdot 2 \delta \sigma_a A_a$$

$$= 4 \delta \sigma_a A_a$$

Ved konstruktionen af brudfigurer for forankring/stød i bjælker i det følgende, må det altså tilstræbes, at flest mulige brudlinier udgår fra jernene. I så fald vil modellen give den bedste beskrivelse af det indre arbejde i tværarmeringen og den omkringliggende beton.

Når brudlinier udgår fra det stødte jern, skal bevægelsesvektoren for bruddelene mellem flydelinierne danne vinkelhalveringslinier mellem brudlinierne (se fig.3.4.4) for at opnå den største lighed med det rotationssymmetriske brud.

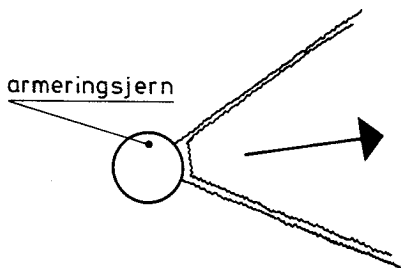


Fig.3.4.4: Bevægelsesvektoren halverer vinklen mellem flydefladerne.

På tilsvarende måde, som det indre arbejde i den omgivende armering muligvis ikke bliver beskrevet rigtigt ved anvendelsen af få brudlinier, medfører de få brudlinier også, at antagelsen om et rotationssymmetrisk brud omkring kammene ikke vil være korrekt. Betingelserne om, at bevægelsesvektorens vinkel med brudfladen ikke må være mindre end friktionsvinklen φ , vil ikke være opfyldt overalt.

Til trods for denne mangel vil det rotationssymmetriske lokale brud alligevel i det følgende blive anvendt i tilfælde, hvor bruddet i den omgivende beton og armering ikke er rotationssymmetrisk. Begrundelsen herfor er en vurdering af, at kammenes bidrag til bæreevnen normalt ikke er det dominerende led, og at en fejl derfor vil kunne tolereres.

Denne metode er kun anvendt i tilfælde, hvor bruddet i den omgivende beton og armering ikke er rotationssymmetrisk. Begrundelsen herfor er en vurdering af, at kammenes bidrag til bæreevnen normalt ikke er det dominerende led, og at en fejl derfor vil kunne tolereres.



Fig. 2.1.1. Skema af brudlinje i kammen.

Denne metode er kun anvendt i tilfælde, hvor bruddet i den omgivende beton og armering ikke er rotationssymmetrisk. Begrundelsen herfor er en vurdering af, at kammenes bidrag til bæreevnen normalt ikke er det dominerende led, og at en fejl derfor vil kunne tolereres.

4. ØVREVÆRDIER FOR FORANKRINGER/STØD I BJÆLKER

4.1 Bjælker med ét jern

En bjælke med ét armeringsjern betragtes. Bjælken er påvirket af et ensformigt fordelt tryk r på undersiden og har i øvrigt det på fig.4.1.1 viste udseende.

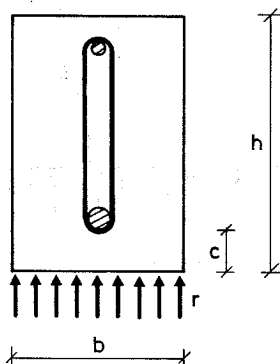


Fig.4.1.1: Snit i bjælke med ét hovedjern

Afhængigt af forholdet c/b vil forskellige brudfigurer kunne forekomme. Hvis c/b er meget lille, vil en brudfigur som vist på fig.4.1.2 give den mindste øvreværdi. I brudøjeblikket bevæges armeringsjernet vinkelret på papirets plan. Det lokale brud omkring kammene bevirker så, at trekanten under armeringsjernet presses ud. Bruddet omkring kammene bevirker, at armeringsjernet flytter sig både i forhold til trekanten og til den øvrige bjælke. Da det antages, at det lokale brud ved kammene er rotationssymmetrisk, følger heraf, at flytningerne mellem armeringsjernet og trekanten og mellem armeringsjernet og den øvrige bjælke er lige store, så når betegnelserne fra afsnit 3, hvor det lokale brud blev udledt, anvendes. Flytningen mellem trekanten og den øvrige bjælke er dermed dobbelt så stor, $2 \sin \alpha$. Bøjlearmeringen antages at følge armeringsjernet og vil dermed få en deformation af samme størrelse som flytningen mellem armeringsjernet og den uskadte del af bjælken, $\sin \alpha$.

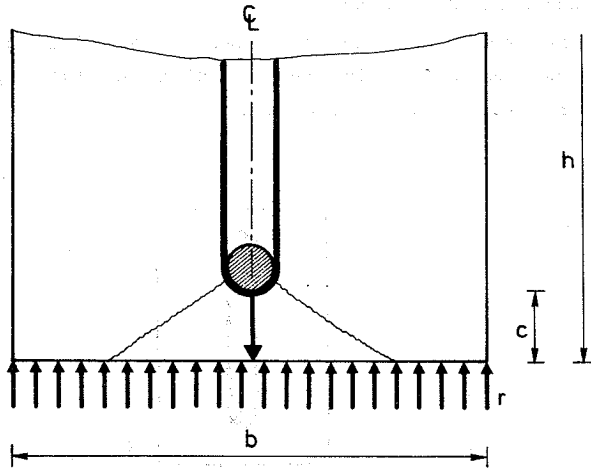


Fig. 4.1.2 Brud for bjælke med et jern, når $\frac{c}{b}$ er lille.
Brud 1.1

Øvre værdien svarende til brudfiguren på fig. 4.1.2 er gennemregnet i Appendix 1.1.

Hvis c/b er meget stor (en høj smal bjælke) vil et brud som vist på fig. 4.1.3 være aktuelt. I brudøjeblikket bevæger hovedjernet sig vinkelret på papirets plan. Bruddet omkring kammerne bevirker at hele bunddæklaget sprænges af. Bruddet er gennemregnet i Appendix 1.2. Som ved brud 1.1 bliver flytningen mellem dæklaget og den øvrige bjælke $2 \sin \alpha$. Bøjlearmeringen antages at følge hovedjernet og flytningen bliver derfor $\sin \alpha$.

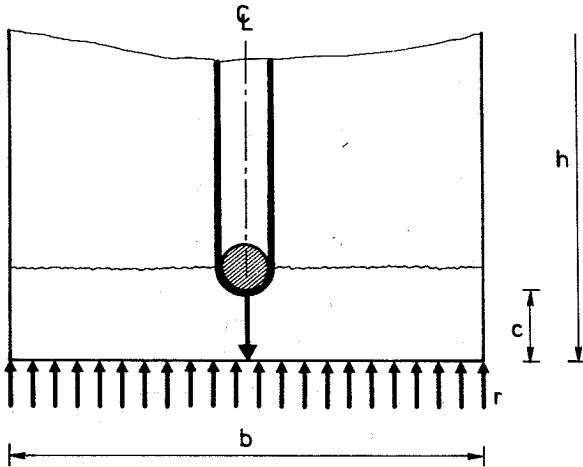


Fig. 4.1.3 Brud for bjælke med et jern, når $\frac{c}{b}$ er stor.
Brud 1.2

Når det ikke er oplagt om brud 1.1 eller 1.2, er det optimale, vil en brudfigur, hvor bjælkens hjørner sprænges af, være en mulighed. Som ved bjælken med to jern burde en brudfigur, hvor hjørnet ved en drejning sprænges af, også her give en lav øvre værdi. En sådan brudfigur kan imidlertid ikke konstrueres, hvis man ønsker at de bortsprængte dele skal bevæge sig i retninger, der er vinkelhalveringslinier til de flader der begrænser delene.

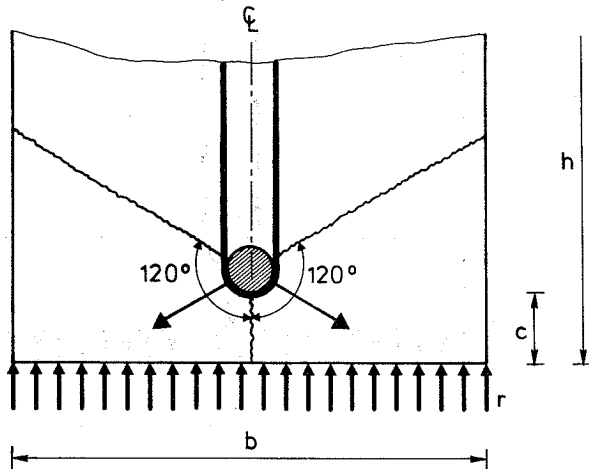


Fig. 4.1.4 Brud 1.3 for bjælke med et jern.

Den på fig. 4.1.4 viste brudfigur opfylder betingelsen om at bevægelsen skal være vinkelhalveringslinie til brudfladerne, samtidig med at der ligesom ved en drejningsbrudfigur kun er trækbrud i brudfladerne. I brudøjeblikket bevæger hovedjernet sig i en retning vinkelret på papirets plan og hjørnerne skubbes bort i de med pilene markerede retninger. Brudfiguren er gennemregnet i Appendix 1.3.

4.2 Bjælker med to jern

I dette afsnit betragtes en bjælke med to armeringsjern. Bjælkens geometri fremgår af fig.4.2.1. Bjælken er igen påvirket af et ensformigt fordelt tryk r på undersiden.

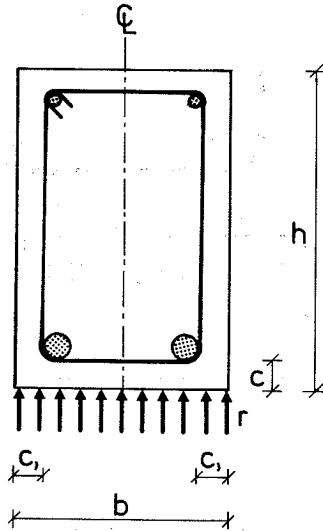


Fig.4.2.1: Bjælke med to jern

5 forskellige brudfigurer undersøges. I det følgende beskrives de hver for sig. Opstillingen af øvreværdierne er beskrevet i appendix 2.

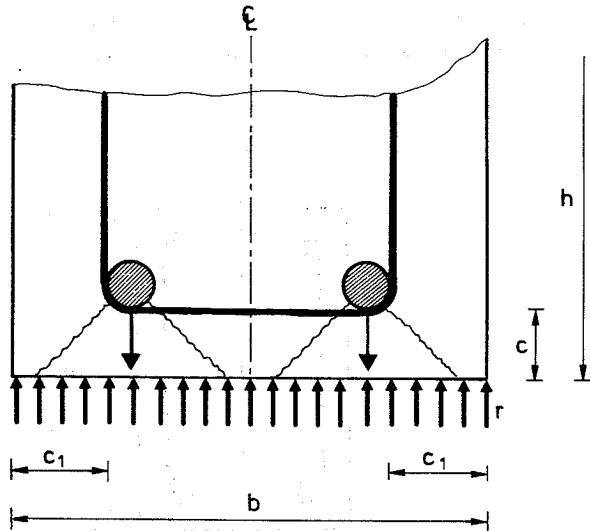


Fig. 4.2.2 Bjælke med to jern, brud 2.1.

For brede bjælker med stort sidedæklag c_1 vil brud 2.1 være aktuell. Bruddet er analogt til brud 1.1. Hovedjernene bevæger sig vinkelret på papirets plan. Tværudvidelsen i forbindelse med bruddet omkring hovedjernenes kamme bevirker at det flyttes $\sin\alpha$ i lodret retning i forhold til resten af bjælken (der benyttes samme betegnelser som i afsnit 3). Bøjlerne antages at følge hovedjernerne og får derfor en lodret forlængelse $\sin\alpha$. Det trekantformede legeme under hovedjernene flyttes $\sin\alpha$ i forhold til hovedjernene og dermed $2 \sin\alpha$ i forhold til den uskadede del af bjælken. En nøje gennemregning af bruddet findes i Appendix 2.1.

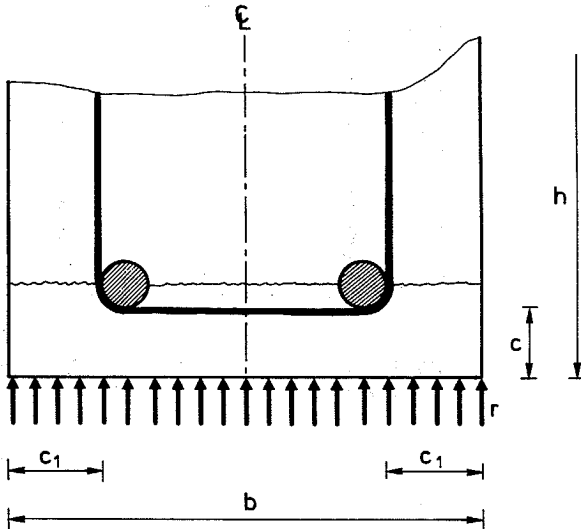


Fig.4.2.3: Bjælke med to jern, brud 2.2

Brud 2.2 svarer til den situation, hvor bruddet i forankringen bevirker, at hele dæklaget skydes af som et hele. Det lokale brud omkring armeringsjernenes kamme antages rotationssymmetrisk. Benyttes samme betegnelse som ved udledningen af det lokale brud i afsnit 3, vil hovedjernene altså flytte sig størrelsen $\sin\alpha$ i forhold til deres omgivelser.

I brud 2.2 antages, at dæklaget skydes af i et samlet stykke. Vi får altså, at hovedjernene flytter sig størrelsen $\sin\alpha$ i lodret retning i forhold til den uskadede del af bjælken og i forhold til dæklaget. Dæklaget flytter sig dermed $2 \sin\alpha$ i forhold til den uskadede del af bjælken. Bøjlearmeringen følger hovedjernet og får dermed en flytning $\sin\alpha$ i lodret retning.

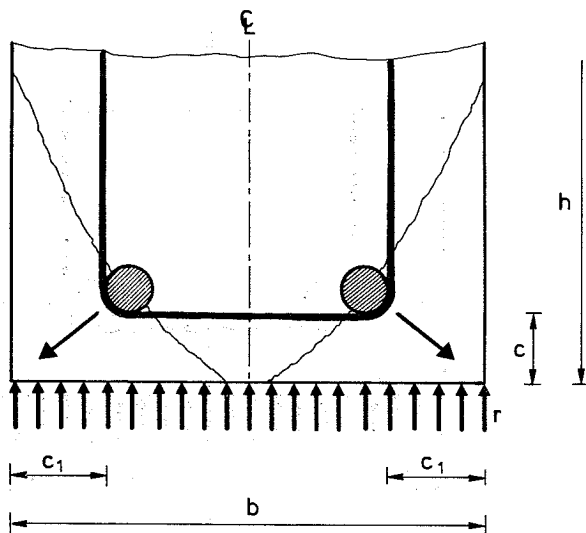


Fig. 4.2.4: Bjælke med to jern, brud 2.3.

Når hovedjernene ligger nær ved bjælkens hjørner vil et brud som det i fig. 4.2.4 viste være en mulighed. Ved bruddet, der er gennemregnet i Appendix 2.3, bevæger hjørnet sig i retning af vinkelhalveringslinien mellem brudfladerne. Brudfladernes vinkel med bjælkens side og bund optimeres når den bedste øvreværdi søges.

Brud 2.4 er egentlig kun et specialtilfælde af brud 2.3, men medtages alligevel som selvstændig brudfigur. Forskellen mellem de to brud er at hjørnets brudflader nu kun danner et plan. Vinklen mellem brudfladen og bjælkens sider er valgt som variabel i gennemregningen i Appendix 2.4

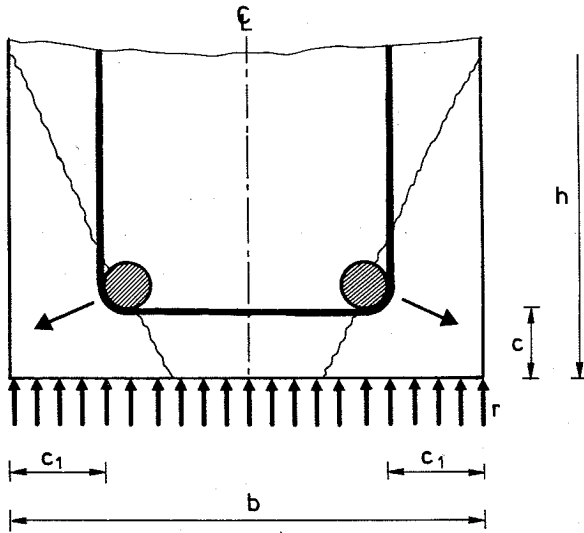


Fig. 4.2.5: Bjælke med to jern, brud 2.4.

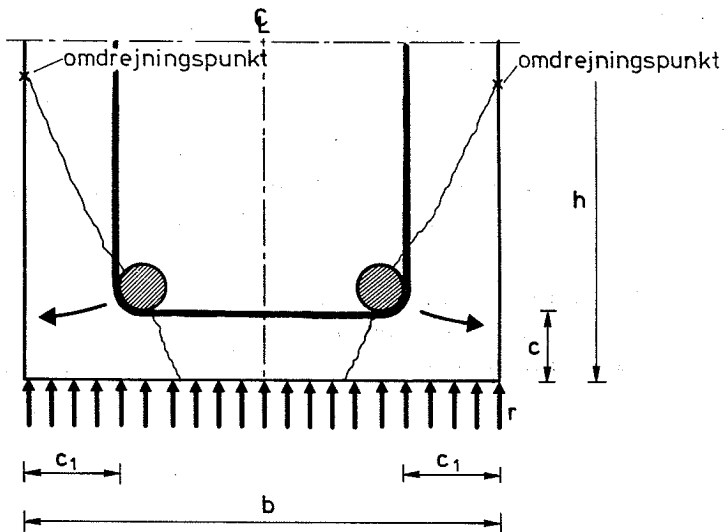


Fig. 4.2.6: Bjælke med to jern, brud 2.5.

Alle brudfigurer skal optimeres med hensyn til de frie parametre (vinkler). Den bedste øvre værdi findes så ved at sammenligne de 5 optimale brudfigurer og vælge den mindste.

Det kan være vanskeligt på forhånd at afgøre hvorvidt brud 2.3 eller 2.4 i en aktuel situation er mest optimalt. Brud 2.4 har det fortrin frem for brud 2.3, at der er rent trækbrud i hjørnets brudflade ind mod den uskadte del af bjælken. Til gengæld vil brud 2.3 være billigere når vederlagstrykket r har en vis størrelse, da bidraget fra r til arbejdet vil kunne gøres mindre, ved at brudfladens vinkel med bjælkens bund bliver 90° , uden at arbejdet i brudfladerne samtidig stiger tilsvarende.

En forbedring af brud 2.4 fås ved at antage at hjørnet drejer sig om brudfladens skæring med bjælkens side. Det indre arbejde i brudfladen bliver mindre på denne måde. Dette brud benævnt brud 2.5 er vist på fig. 4.2.6 og gennemregnet i Appendix 2.5.

Bemærk iøvrigt at det ikke er nogen fordel at rykke omdrejningspunktet op over bjælkens øverste hjørne, det indre arbejde i brudfladen vil dermed stige og bruddet vil nærme sig type 2.4.

Optimeringen af brudfigurerne er foretaget numerisk ud fra de opstillede formler.

4.3 Bjælker med tre jern

Vi vil nu kort se på en bjælke med tre jern. Bjælken er på underside påvirket af et ensformigt fordelt tryk r . Geometrien fremgår i øvrigt af fig. 4.3.1.

Da de lokale brud omkring det midterste og omkring de yderste jern ikke behøver at være ens, vil der for bjælker med tre jern være flere mulige brudfigurer end for bjælker med to jern.

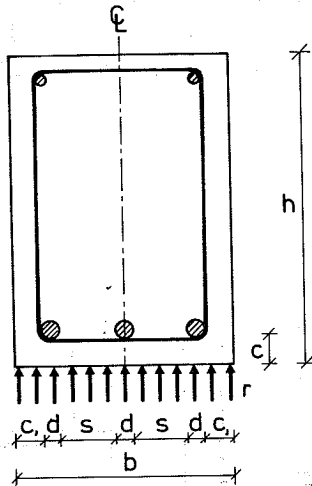


Fig.4.3.1: Bjælke med tre jern

På fig. 4.3.2 er skitseret 3 mulige brudfigurer for en bjælke med tre jern.

Brud 3.1 svarer nøje til brud 1.1 og 2.1, og vil være aktuelt for en forholdsvis bred bjælke med lille bunddæklag og stort sidedæklag.

Brud 3.2 vil være aktuelt for en smal bjælke med stort bunddæklag. Bruddet svarer nøje til brud 1.2 og 2.2. Ved en bjælke med lille sidedæklag skal man også være opmærksom på muligheden for at bruddet kan optræde ved at der afsprænges et trekantformet område i siden i stedet for i bunden (se iøvrigt afsnit 4.8).

Brud 3.3 vil være en mulighed, når de to sidejern er placeret langt ude i hjørnerne. Brud 3.3 svarer til brud 2.5 kombineret med brud 1.1.

Der er ikke her angivet øvre værdier for bjælker med tre jern. Sådanne udtryk kan dog hurtigt opstilles ved at gå ind i udregningerne i Appendix 1 og 2 og kombinere de forskellige led, svarende til de respektive dele af brudfiguren.

Som det fremgår senere har det ikke været muligt at finde brugbare forsøg med forankring af tre jern. Bjælker med tre jern skal derfor ikke på dette sted behandles yderligere.

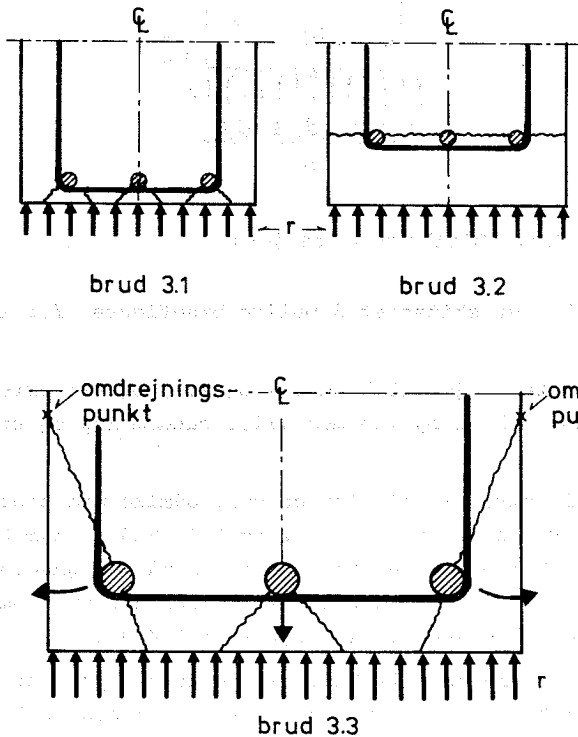


Fig. 4.3.2: Forskellige brudfigurer for en bjælke med tre jern.

4.4 Endebidrag

Brudfigurerne i afsnit 4.1, 4.2 og 4.3 er alle vist i snit på tværs af bjælken. Lægges et snit på langs af bjælken, ses, at der mangler en brudflade, hvor stødet/forankringen ender. Uden en sådan endeblade er bruddet ikke muligt.

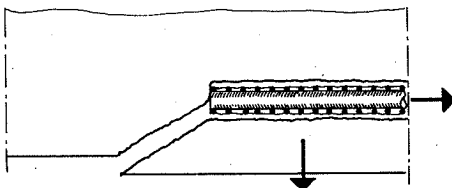


Fig.4.4.1: Endebrudflade

Ved stødender optræder tidligt i belastningshistorien bøjningsrevner på grund af ændringerne i stivheden ved skiftet mellem få og mange jern. Begyndelsen til endebrudfladen vil således ofte være tilstede. I vederlagszonen vil forskydningsrevner have en lignende virkning. Endebrudfladen vil altså skulle forløbe gennem allerede revnede områder. Ved forskydningsforsøg med bjælker observeres at v varierer med forskydningsspændet $\frac{a}{h}$ (se Nielsen et.al. [78.1]) og dermed med hvor meget revneretningerne skal ændres hen gennem forsøget. Dette forhold er ganske vist ikke den eneste eller væsentligste forklaring på v -variationen, men forholdet antyder, at det kan forventes at betonens plastiske styrker ikke nødvendigvis vil være de samme ved endebrudfladerne som ved de øvrige brudflader. Endebrudfladens placering i bjælken og forankringsbruddets placering i bjælkens belastningshistorie vil altså have indflydelse på de plastiske styrkers størrelse for endebrudfladen. Da det ydermere vil være på den sikre side at se bort fra endebidraget, vælges det i almindelighed at undlade at tage hensyn til endebrudfladen.

4.5 Betonstyrkens indflydelse

Som det kan ses af øvreverdierne i de forskellige appendices, er alle bæreevnerne gjort dimensionsløse. Betonens tryk- og trækstyrke indgår således ikke direkte i nogen af udtrykkene.

Som beskrevet af Exner [79.1] må det imidlertid forventes, at de dimensionsløse enaksede plastiske tryk- og trækstyrker v og p bliver mindre, når betonens cylindertrykstyrke σ_c stiger. Et sådant fald i v og p for stigende σ_c er fundet ved behandlingen af forskydning i jernbetonbjælker, se Nielsen et al. [78.1], og ved gennemlokning af jernbetonplader, se Hess et al. [78.3].

4.6 Vederlagstrykkets indflydelse

Ved en bjælkes understøtninger forekommer det naturligt at forvente, at reaktionens størrelse må have en indflydelse på bæreevnen af armeringens forankringer.

Ved beregningen af øvreverdier for forankringernes bæreevne ud fra de tidligere viste brudfigurer kommer reaktionens tryk på bjælken til at udføre et negativt bidrag til det ydre arbejde. Når det ydre arbejde sættes lig med det indre arbejde, og udtrykkene løses med hensyn til τ/σ_c , flyttes bidraget over på den anden side af lighedstegnet. Stigende vederlagstryk vil altså medføre en forøgelse af forankringens bæreevne.

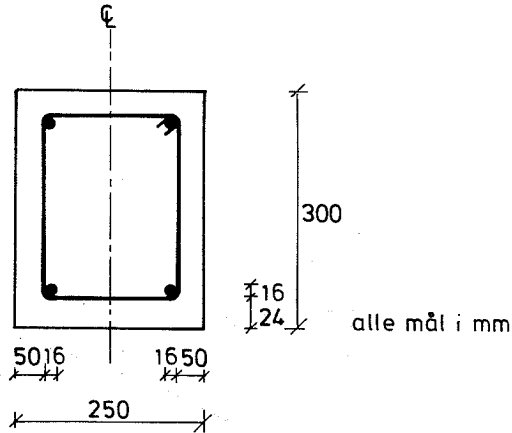


Fig.4.6.1: Tværsnit af bjælke med 2 jern

En bjælke med to jern og den på figur 4.6.1 viste geometri betragtes. Hovedarmeringen er svensk kamstål 60 ϕ 16 mm. Målene svarer iøvrigt til det af Jensen [80.2] benyttede forsøgsemne.

Af figurerne 4.6.2 og 4.6.3 fremgår hvordan bæreevnen $\frac{T}{\sigma_c}$ som funktion af vederlagstrykket $\frac{r}{\sigma_c}$ ændres når de dimensionsløse plastiske betonstyrker ν og ρ varieres.

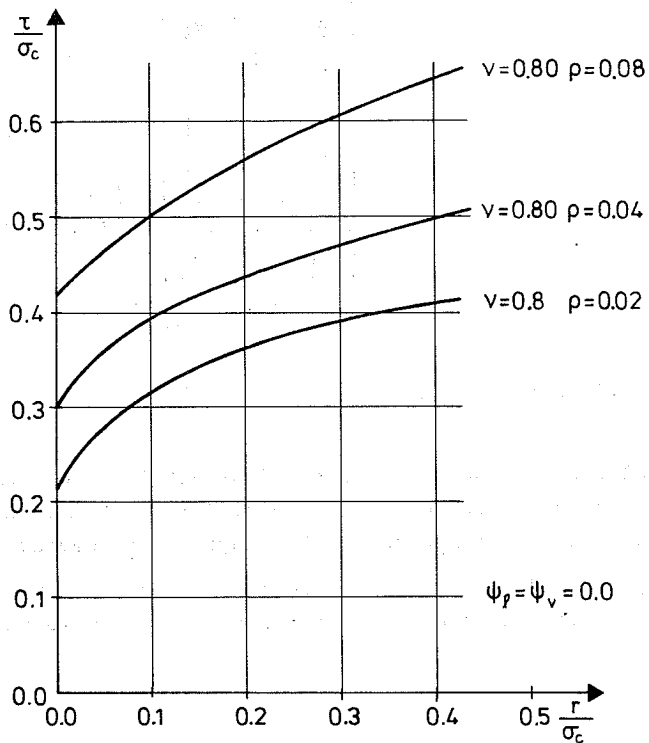


Fig. 4.6.2: τ/σ_c som funktion af r/σ_c for en bjælke med to jern. Bjælkens geometri fremgår af fig.4.6.1.

På fig. 4.6.2 er v holdt konstant og ρ varieret.

På fig. 4.6.3 er forholdet med v og ρ konstant $v/\rho = 10$.

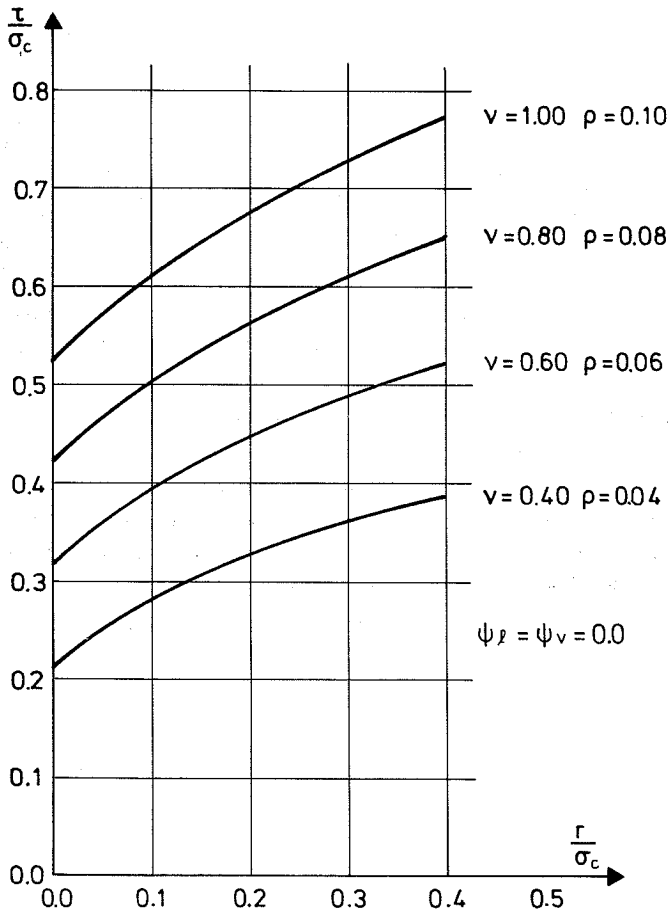


Fig. 4.6.3: τ/σ_c som funktion af r/σ_c for en bjælke med to jern. Bjælkens geometri fremgår af fig. 4.6.1.

På fig. 4.6.4 er $\frac{\tau}{\sigma_c}$ som funktion af r/σ_c afbildet for tre forskellige typer armering, dels svensk kamstål 60, ϕ 16 mm (Sk 16) og dels to fiktive armeringsstål SK 16 I med dobbelt så høje kamme og Sk 16 II med halvt så høje kamme som det virkelige armeringsstål.

	d [mm]	a [mm]	k [mm]	D	F
Sk 16	16	8.5	1.1	0.069	0.57
Sk 16 I	16	8.5	2.2	0.147	0.638
Sk 16 II	16	8.5	0.5	0.0303	0.531

Tabel 4.6.1: Dimensioner for de ved gennemregningen i fig. 4.6.4 benyttede armeringsjern.

For Sk 16 II viser det sig, at det lokale brud omkring kammene skifter til type 1 når r/σ_c bliver mindre end ca. 0.2. Eller når C bliver mindre end ca. 0.55. Grænsen mellem det lokale brud af type 1 og 2 er en funktion af både armeringens dimensioner og den dimensionsløse betonstyrke, som det fremgår af afsnit 3.1. Med den aktuelle bjælkegeometri giver brud 2.5 mindst bæreevne ved de i fig. 4.6.2, fig. 4.6.3 og fig. 4.6.4 gennemregnede eksempler.

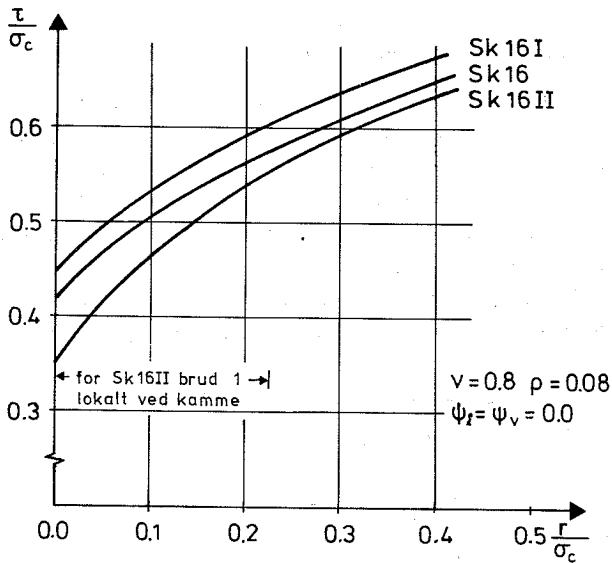


Fig. 4.6.4: τ/σ_c som funktion af r/σ_c for en bjælke med to jern. Bjælkens mål fremgår af fig. 4.6.1. Hovedarmerings kamhøjde er varieret.

Ved de hidtidige beregninger af vederlagstrykkets indflydelse er det forudsat, at vederlagstrykket kunne betragtes som en ensformigt fordelt ydre last på bjælken. Dette kræver imidlertid, at lejepladen skal være så blød, at den også i brudøjeblikket er i stand til at sikre denne fordeling. Hvis man ser på de enkelte bjælkedeles bevægelser, vil det nok være berettiget at betvivle lejets evne til at opretholde den ensformige fordeling af vederlagstrykket i brudøjeblikket.

På den anden side kunne man anse lejepladen for at være uendelig stiv, hvilket ville betyde, at bjælken i brudøjeblikket kun ville røre lejepladen i det yderste punkt af de bevægelige bjælke dele. Det ydre arbejde fra reaktionen skulle så altid svare til løftning af hele bjælken. En sådan betragtningsmåde vil altid give en øvreværdi, der er større end eller lig med en øvreværdi fundet ud fra den tidligere nævnte antagelse, og dermed under de her benyttede forudsætninger er mere ugunstig øvreværdi.

Undersøges eksempelvis virkningen på brud 2.1 fås når der regnes med "blødt" vederlag jvf. Appendix 2.1:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \min \left\{ \begin{array}{l} Dv \frac{0.8}{\sin(\varphi+2\gamma)-0.6} + C \tan(\varphi+\gamma) \\ \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C \end{array} \right.$$

$$\text{hvor } \cot \gamma = \frac{1}{4} (3+5 \sqrt{1+2 \frac{C}{Dv}})$$

$$C = \frac{4}{d\pi} \left(\frac{c+\frac{d}{2}}{\sin\theta} - \frac{d}{2} \right) \left\{ \frac{v}{2} (1-\cos\theta) + \rho \frac{\cos\theta-\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \right\} + \\ + \frac{1}{2\pi} \psi_L + \frac{4}{d\pi} (c+\frac{d}{2}) \cot\theta \frac{r}{\sigma_c}$$

Regnes vederlaget stift, ændres sidste led i C, der stammer fra vederlagstrykkets arbejde til:

$$\frac{r \frac{b}{2} l^2}{l d \pi \sigma_c} = \frac{b}{\pi d} \frac{r}{\sigma_c}$$

C bliver herefter:

$$C = \frac{4}{d\pi} \left(\frac{c+d}{\sin\theta} - \frac{d}{2} \right) \left\{ \frac{v}{2} (1-\cos\theta) + \rho \frac{\cos\theta - \sin\phi}{1-\sin\phi} \right\} + \frac{1}{2\pi} \psi_l + \frac{b}{\pi d} \frac{r}{\sigma_c}$$

På figur 4.6.5 vises en gennemregning af brud 2.1 med "blødt" og stift vederlag.

Indflydelsen fra vederlagets stivhed varierer i de forskellige brudfigurer. For brud 2.2 er vederlagets stivhed således uden betydning.

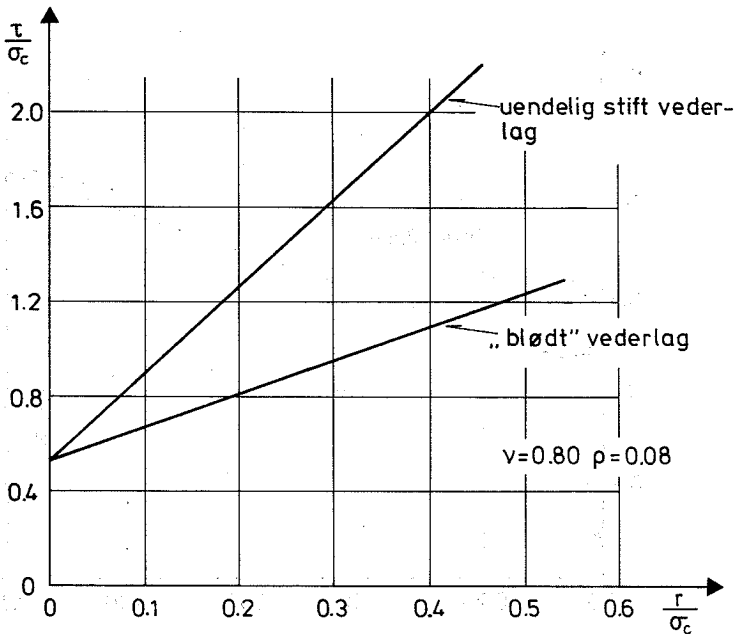


Fig. 4.6.5: τ/σ_c som funktion af r/σ_c for henholdsvis

"blødt" leje og uendelig stift leje. Gennem-

regnet for bjælke med to jern, med mål som på fig. 4.6.1. Kun brud 2.1 er undersøgt.

Ud fra de ovenfor anførte betragtninger antages lejet i det følgende altid at være blødt.

4.7 Tværarmeringens indflydelse

Ser vi igen på bjælken med to jern som vist på fig.4.6.1, vil vi nu undersøge betydningen af at variere tværarmeringsmængden udtrykt ved $\psi = 2A_b \sigma_b / l d \sigma_c$. Her er A_b/l tværarmeringsarealet i et snit pr længdeenhed, og σ_b er tværarmeringens flyde-spænding.

Resultatet af en gennemregning med $r/\sigma_c = 0$ og $v = 0.80$ og $\rho = 0.08$ fremgår af fig.4.7.1.

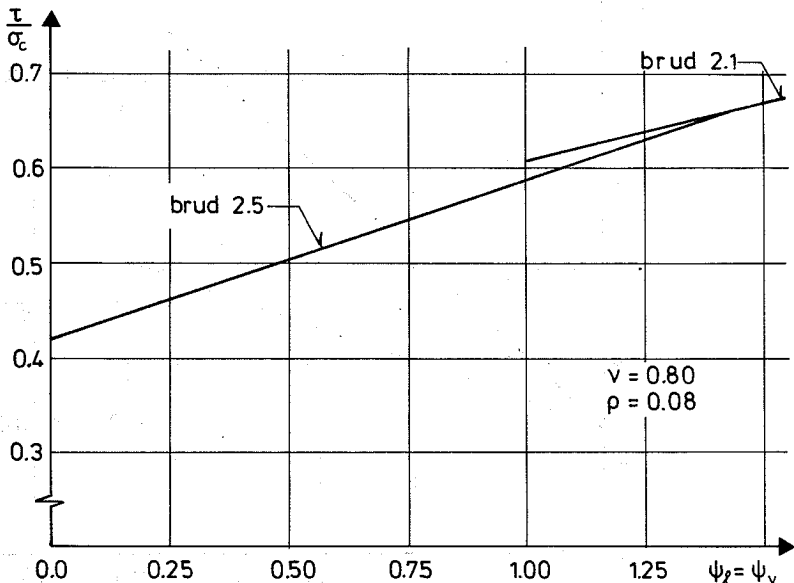


Fig. 4.7.1: τ/σ_c som funktion af tværarmeringsmængden udtrykt ved ψ , for en bjælke med to jern og geometri som vist på fig. 4.6.1.

Det viser sig at bruddet ved den her benyttede geometri skifter fra brud 2.5 til brud 2.1 ved store tværarmeringsgrader $\psi_{\ell} = \psi_v > 1.40$.

4.8 Dæklagets indflydelse

Der tages igen udgangspunkt i bjælken med to jern fra figur 4.6.1. I det følgende undersøges dernæst bæreevnens og brudfigurerernes variation med dæklagernes tykkelse idet bjælkens bredde og højde holdes konstant, som armering regnes med SK 16.

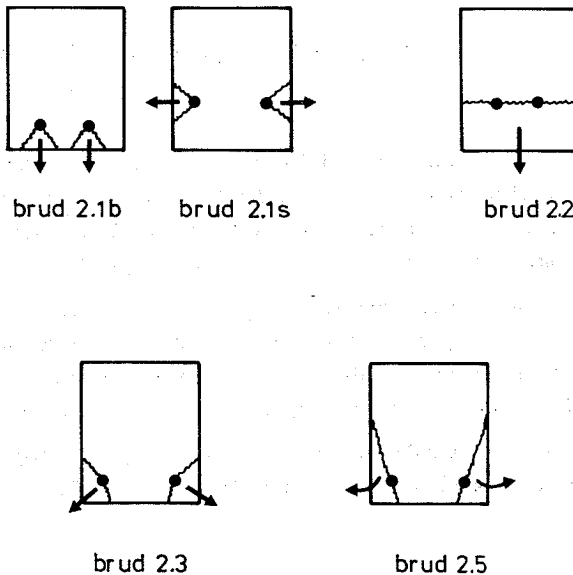


Fig. 4.8.1: Oversigt over mulige brudfigurer.

$\frac{c_1}{d}$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0
0.5	[2.3]0.223	[2.3]0.268	[2.1b]0.332	[2.1b]0.332	[2.1b]0.332
1.0	[2.3]0.268	[2.3]0.307	[2.3] 0.377	[2.3] 0.422	[2.1b]0.438
2.0	[2.1s]0.332	[2.3]0.377	[2.3] 0.426	[2.3] 0.473	[2.5] 0.477
3.0	[2.1s]0.332	[2.3]0.422	[2.3] 0.473	[2.2] 0.488	[2.2] 0.488
4.0	[2.1s]0.332	[2.1s]0.438	[2.2] 0.488	[2.2] 0.488	[2.2] 0.488

Tabel 4.8.1: τ/σ_c ved forskellige dæklagskombinationer.

$$r/\sigma_c = 0.0, \psi_v = \psi_x = 0.0, v = 0.80 \text{ og } \rho = 0.08$$

Bæreevnen ved forskellige dæklagskombinationer fremgår af tabel 4.8.1. Brudfigurens type er angivet i kantet parentes, ovenover den kraftigt optrukne linie er det lokale brud omkring hovedarmringens kamme af type 1 og nedenfor af type 2.

Tabel 4.8.1 er næsten symmetrisk, værdierne for $(c_1/d, c/d) = (2.0, 4.0)$ og $(c_1/d, c/d) = (4.0, 2.0)$ er ikke helt ens, da brud 2.5 af symmetrigrunde ikke kan lade sig gøre i en udgave hvor bunddæklaget sprænges af, bruddet vil da blive af type 2.2.

I figur 4.8.2 er værdierne fra tabel optegnet. Figur 4.8.3 viser brudfigurens udseende ved forskellige c/d når $c_1/d = 3.0$.

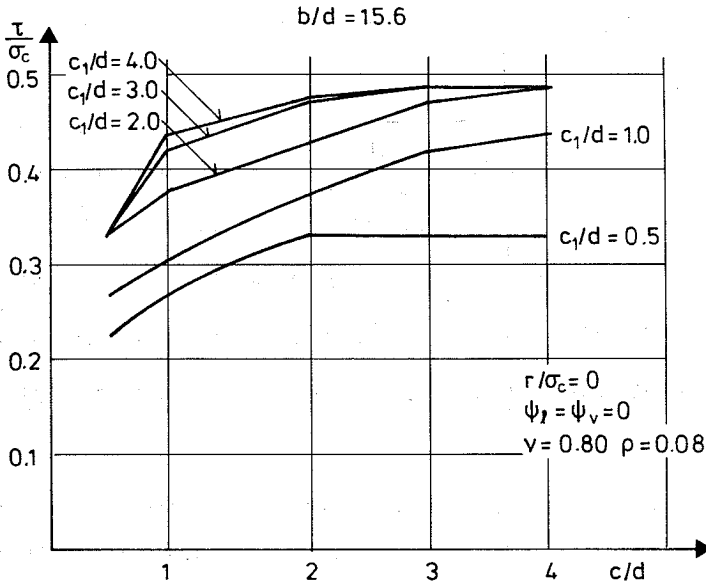


Fig. 4.8.2: Bjælke med to jern, bærevne τ/σ_c ved forskellige kombinationer af c_1/d og c/d .
 $r/\sigma_c = 0$, $\psi_l = \psi_v = 0$ $\nu = 0.80$ $\rho = 0.08$

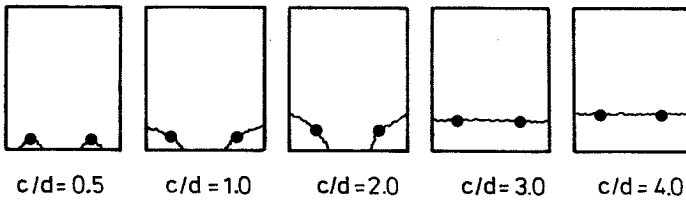


Fig. 4.8.3: Brudfigurer for $c_1/d = 3.0$, $r/\sigma_c = 0.0$
 $\psi_l = \psi_v = 0$ $\nu = 0.80$ $\rho = 0.08$

$\frac{c_1}{d}$	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0
0.5	[2.5] 0.274	[2.5] 0.315	[2.5] 0.380	[2.1b] 0.414	[2.1b] 0.414
1.0	[2.3] 0.317	[2.5] 0.367	[2.5] 0.415	[2.5] 0.463	[2.5] 0.510
2.0	[2.1s] 0.332	[2.3] 0.420	[2.5] 0.486	[2.5] 0.534	[2.5] 0.582
3.0	[2.1s] 0.332	[2.1s] 0.438	[2.3] 0.548	[2.5] 0.603	[2.5] 0.652
4.0	[2.1s] 0.332	[2.1s] 0.438	[2.3] 0.594	[2.5] 0.673	[2.5] 0.721

Tabel 4.8.2: τ/σ_c ved forskellige dæklagskombinationer.

$$r/\sigma_c = 0.1, \psi_v = \psi_h = 0.0, v = 0.80 \text{ og } \rho = 0.08.$$

Af tabel 4.8.2 fremgår bæreevnen $\frac{\tau}{\sigma_c}$ ved de samme dæklagskombinationer som i tabel 4.8.1 når $r/\sigma_c = 0.1$. Brudfigurens type er angivet i kantet parentes. Til venstre for den kraftigt optrukne linie er det lokale brud omkring kammene af type 1 og til højre af type 2.

Tabel 4.8.2 er i modsætning til 4.8.1 ikke symmetrisk.

I figur 4.8.4 er bæreevnerne fra tabel 4.8.2 optegnet, figur 4.8.5 viser brudfigurens udseende når c/d varieres og $c_1/d = 3.0$.

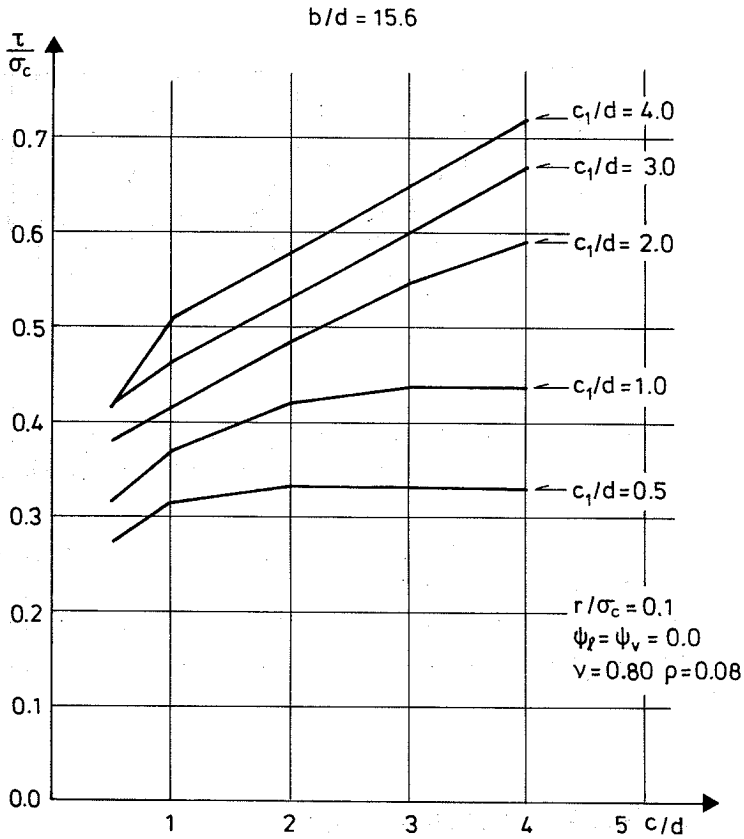


Fig. 4.8.4: Bjælke med to jern, bæreevne τ/σ_c ved forskellige kombinationer af c_1/d og c/d .

$$r/\sigma_c = 0.1 \quad \psi_\ell = \psi_v = 0 \quad v = 0.80 \quad \rho = 0.08 .$$

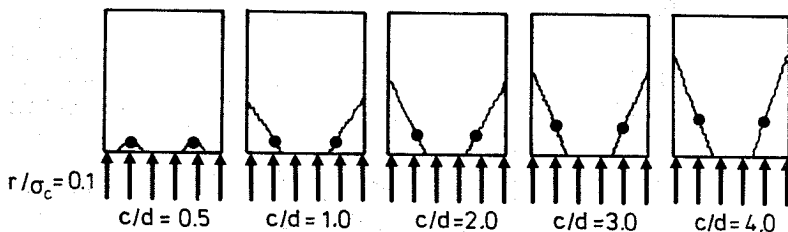


Fig. 4.8.5: Brudfigur for $c_1/d = 3.0$ $r/\sigma_c = 0.1$
 $\psi_u = \psi_v = 0.0$ $v = 0.80$ $\rho = 0.08$.

Alle bæreevner og brudfigurer i dette afsnit skal illustrere, hvordan bæreevnen og brudfiguren ændrer sig, når dæklagene ændres. Havde man valgt andre bredder, vederlagstryk eller bøjlearmering, var resultaterne blevet anderledes, men dog af samme principielle udseende.

4.9 Indflydelse af stødets længde

Forskellen mellem en forankring og et stød ligger i det væsentlige i, i hvor høj grad der skal tages hensyn til et endebidrag.

Ser vi på udtrækningsforsøg (fig. 4.9.1) af en eller anden art, vil der her ikke optræde noget endebidrag. Brudfiguren vil være identisk i alle

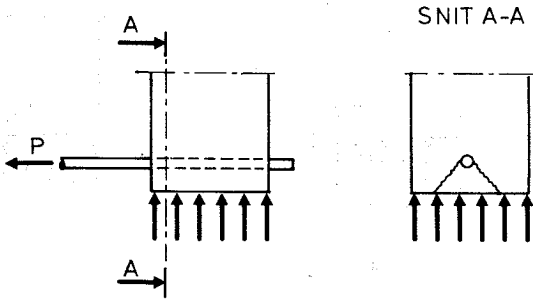


Fig.4.9.1: Udtrækningsforsøg

snit på tværs af armeringsstangen. Bruddet er således umiddelbart muligt. Ser vi derimod på forankringen af et jern i enden af en bjælke (fig. 4.9.2) vil snit i brudfiguren være identiske, så længe vi befinder os inden for forankringslængden ℓ . Brudfladerne skal imidlertid også i enden ind mod bjælkens midte ud til bjælkens overflade. Der bliver altså tale om et endebidrag i den ene ende af forankringen.

Ser vi endelig på et stød (fig. 4.9.3), vil vi af samme grunde som nævnt ovenfor få et endebidrag i begge ender.

Da endebidraget er uafhængigt af stødets længde, vil vi, når vi ser på $P/\ell \text{ d}\pi \sigma_c = \tau/\sigma_c$ få endebidraget som et eller andet led

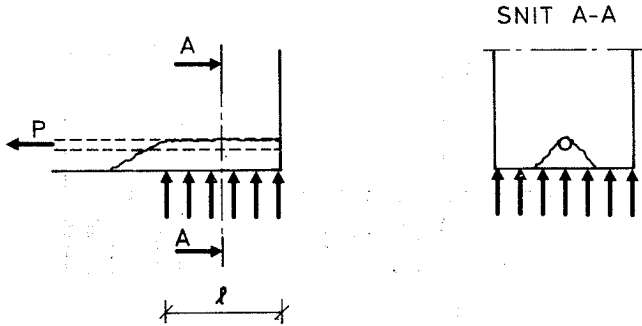


Fig.4.9.2: Forankring i bjælkeende

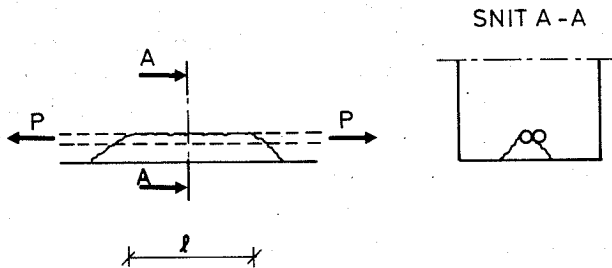


Fig.4.9.3: Stød

divideret med stødets længde l . Stødets længde vil dermed få den fra forsøg velkendte indflydelse på bæreevnen.

På fig.4.9.4 ses længdeeffektens principielle virkning for et stød i en bjælke.

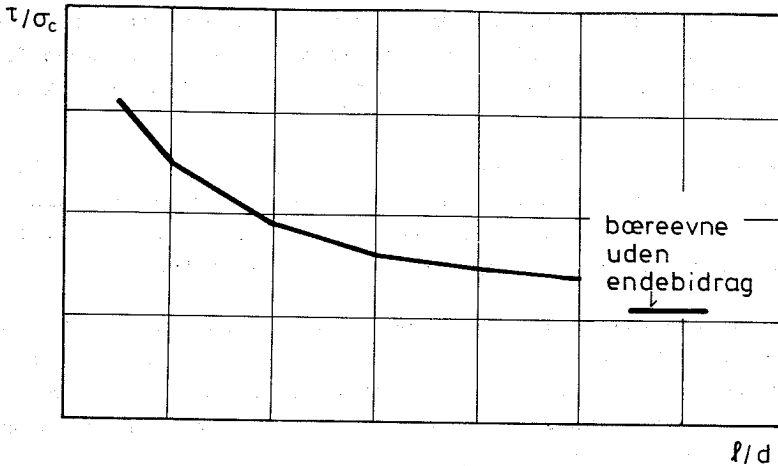


Fig.4.9.4: Bæreevnen for et stød som funktion af stødets længde l/d .

På et tidspunkt opstår der flydning i hovedjernet, hvis stødlængden øges, så bæreevnen derefter kan udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{P}{l d \pi \sigma_c} = \frac{d^2 \pi \sigma_a}{4 l d \pi \sigma_c} = \frac{\sigma_a}{4 \sigma_c} \frac{l/d}{l/d}$$

hvor σ_a er hovedarmeringens flydespænding.

Hvilket ville blive en hyperbel, hvis den blev afbildet i fig.4.9.4.

4.10 Regneteknik og tilnærmede beregninger

Ved beregningen af en øvre værdi for τ/σ_c er den letteste og mest overskuelige regnemetode, når man har valgt de brudfigurer man ønsker at undersøge, at skille det lokale brud omkring kammene fra det resterende brud i bjælken, så man når frem til et udtryk af samme form som (3.1.3).

Man kan herefter først finde den mindste værdi af C , her vil man kunne komme langt alene ved hjælp af en programmerbar lommeregner. Dernæst findes selve bæreevnen ved hjælp af (3.1.11) og (3.1.12) samt (3.1.21), idet (3.1.20) normalt vil være uaktuel.

Kravet til nøjagtigheden på bestemmelsen af bæreevnen af et stød eller en forankring vil ofte ikke være større end, at man ved at skønne nogle få brudfigurer og gennemregne øvre værdierne med v og ρ sat i underkanten af de erfaringsmæssige værdier vil kunne komme til yderst rimelige resultater.

Ser vi først på en bjælke med stor afstand mellem de enkelte jern, vil det være rimeligt at skønne en brudfigur som vist på fig.

4.10.1.

De samme betegnelser som i afsnit 3.1 ved udledelsen af arbejdet ved det lokale brud omkring kammene benyttes.

Det ydre arbejde hidrører dels fra det arbejde, kraften i armeringen udfører samt dels fra det arbejde, vederlagstrykket r udfører, når det trekantformede legeme presses ud. Idet det stadig antages, at bruddet omkring kammene er rotationssymmetrisk, bliver det trekantformede legemes lodrette flytning to gange den flytning, armeringsstangen får i forhold til den omgivende beton. Vi får altså:

$$w_e = P \cdot \cos \alpha - 2 \sin \alpha (-r) \ell (c + \frac{d}{2}) 2 \cot \theta$$

Det indre arbejde hidrører fra bruddet omkring kammene og bruddet mellem det trekantformede legeme og den øvrige bjælke.

Vi får her følgende bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \text{Arc tan} \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+k) \pi \frac{k}{\sin \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \text{Arc tan} \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+2k - a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right\}$$

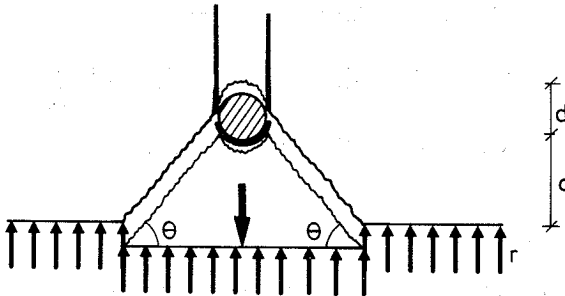


Fig.4.10.1: Brudfigur omkring et enkelt fjerntliggende jern.

Fra skillefladen mellem bjælken og den løse del fås:

$$w_i = 2 \left(\frac{c+2}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) l 2 \sin \alpha \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \cos \theta) + \sigma_t \frac{\cos \theta - \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right\}$$

Fra bøjlearmeringen, der på samme måde som tidligere antages at følge hovedarmeringens bevægelser, fås:

$$w_i = 2 A_b \sigma_b \sin \alpha$$

Her er A_b arealet af et snit i alle bøjlerne inden for længden l .

Et udtryk for C kan herefter opstilles:

$$C = \frac{4}{d\pi} \left(\frac{c+\frac{d}{2}}{\sin\theta} - \frac{d}{2} \right) \left\{ \frac{v}{2} (1-\cos\theta) + \rho \frac{\cos\theta - \sin\phi}{1-\sin\phi} \right\} + \frac{1}{\pi} \psi + \\ + \frac{4}{d\pi} \left(c + \frac{d}{2} \right) \cot\theta \frac{r}{\sigma_c}$$

Normalt vil der enten være et vederlagstryk, eller hovedarmeringen vil være fastholdt af bøjler (bemærk at kun bøjler, der er i stand til at yde modstand mod en lodret flytning af hovedarmeringen, vil have nogen virkning).

Under de nævnte forudsætninger vil det være rimeligt at sætte $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$. C kan så findes direkte:

$$C = \frac{0.8}{d\pi} \left(\frac{5}{4} \left(c + \frac{d}{2} \right) - \frac{d}{2} \right) v + \frac{1}{\pi} \phi + \frac{16}{3\pi d} \left(c + \frac{d}{2} \right) \frac{r}{\sigma_c} \quad (4.10.1)$$

herefter findes $\frac{\tau}{\sigma_c}$ ved hjælp af (3.1.21):

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C$$

Hvis C er lille og/eller D er lille bør bæreevnen også undersøges ved hjælp af (3.1.11) og (3.1.12).

Ser vi dernæst på en bjælke med mange forholdsvis tætliggende jern, vil den på fig.4.10.2 viste brudfigur give rimelige resultater. Den viste brudfigur svarer til den situation, hvor bruddet i stødet/forankringen bevirker, at hele dæklaget sprænges af.

Brudformen svarer nøje til bruddene af type 2 for bjælker med 1 og 2 jern, og vi kan udnytte bæreevneudtrykket for et af disse brud (se appendiks 1.2 eller appendiks 2.2).

Det antages igen, at der er enten et vederlagstryk eller en bøjlearmering, der er i stand til at fastholde hovedjernene.

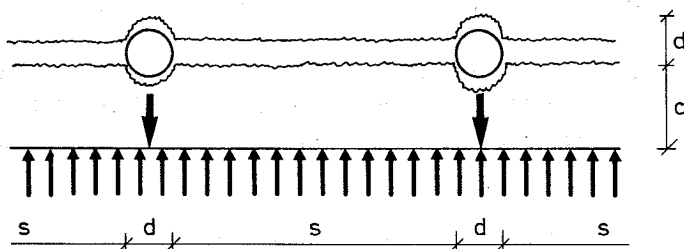


Fig.4.10.2: Brudfigur for bjælke med mange forholdsvis tætliggende jern

Ud fra appendiks 1.2 og 2.2 kan et udtryk for C opstilles.

$$C = \frac{2(n-1)s}{n\pi d} \rho + \frac{2c_1}{n\pi d} \rho + \frac{\psi_l}{n\pi} + \frac{2b}{n\pi d} \frac{r}{\sigma_c} \quad (4.10.2)$$

herefter findes $\frac{\tau}{\sigma_c}$ ved hjælp af (3.1.21)

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C$$

Hvis C er lille og/eller D er lille bør bæreevnen også undersøges ved hjælp af (3.1.11) og (3.1.12).

For bjælker med to jern og almindelige dæklag kan man i langt de fleste tilfælde nøjes med at undersøge brud 2.5, se iøvrigt afsnit 4.8 med hensyn til hvornår de forskellige brudfigurer bliver aktuelle.

Benyttes udtrykket for C i appendiks 2.5 kan man hurtigt ved at indsætte $\beta = 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ finde det mindste C og dermed ved hjælp af (3.1.21) bæreevnen $\frac{\tau}{\sigma_c}$.

5. FORANKRINGSSTYRKE VED VEDERLAG

I den danske betonnorm, DS 411 [73.2], står der på side 41:

"Forankringslængden kan reduceres ud over de ovenfor anførte værdier, såfremt en eventuel gunstig virkning af reaktionen eller af en øget tværarmering kan dokumenteres."

Virkningen af reaktionen og tværarmeringen er undersøgt i forsøg både her i landet og i udlandet.

Untrauer & Henry beskriver i [65.1] nogle forsøg til undersøgelse af sidetrykkets indflydelse på forankringsstyrken. Forsøgene udførtes med betonterninger, hvori der centralt var indstøbt et jern, se fig.5.1.

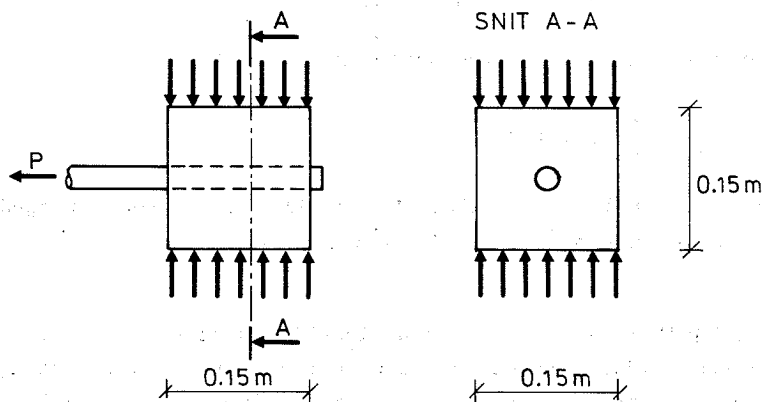


Fig.5.1: Udtrækningsforsøg af Untrauer & Henry [65.1]

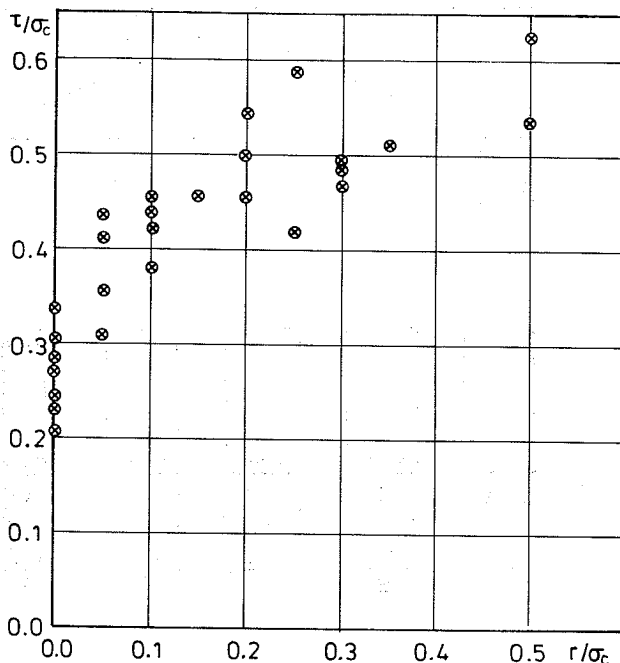


Fig.5.2: Resultater af forsøg udført af Untrauer & Henry [65.1]

Som det ses af fig.5.2, fandtes at forankringsstyrken, her udtrykt som τ/σ_c , steg, når sidetrykket udtrykt ved r/σ_c blev øget. Armeringsdimensionerne ved forsøgene var 9/8" og 6/8".

Rathkjen [72.1] har udført forsøg med bjælker med et udseende som vist på fig.5.3. Der er udført forsøg med de 5 viste tværsnit samt forskellige dimensioner af forkammet og ikke-forkammet stål. Ialt er der udført ca 100 forsøg. Belastningsarrangementet var principielt som vist på fig.5.4.

Jensen [80.2] har udført ca.125 udtrækningsforsøg med det på fig. 5.5 viste prøvelegeme. Hovedparametrene var vederlagstrykket og betonstyrken, men der er også udført forsøg med bøjlearmerede emner.

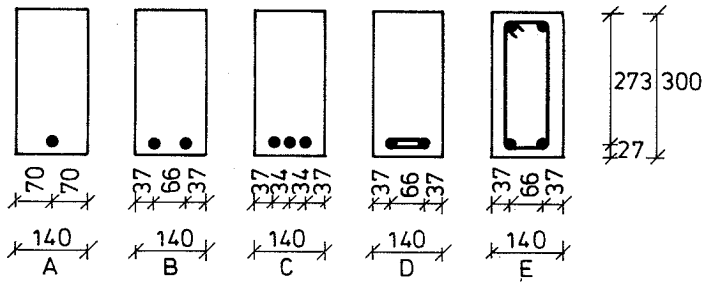
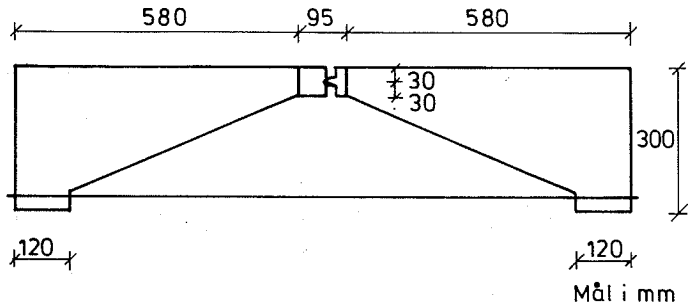


Fig.5.3: Rathkjen's [72.1] forsøgsemner.

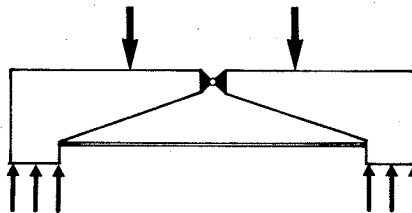


Fig.5.4: Belastningsarrangement ved Rathkjen's forsøg.

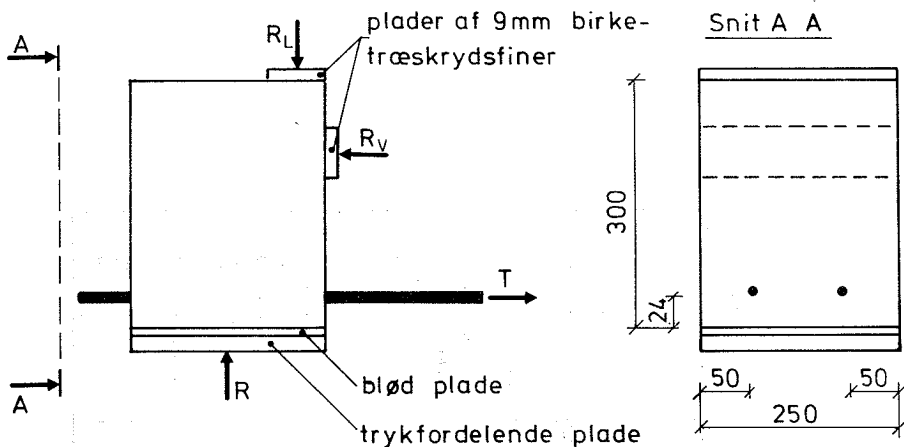


Fig.5.5: Forsøgsmetode ved forsøg af Jensen [80.2]

I de følgende afsnit vil vi se på resultaterne af de to sidstnævnte forsøgsserier og sammenligne dem med de beregnede bæreevner.

5.1 Vederlagstryk r/σ_c og betonstyrken σ_c

Der findes yderst få forsøg med forankringer af enkelte jern i bjælkeender.

Rathkjen [72.1] har udført forsøg med forankring af et kamstål 42 \varnothing 14 mm med den på fig.5.3 og 5.4 viste forsøgssopstilling. Betonstyrken ved forsøgene var ca 20 MPa.

Som det fremgår af figur 5.1.1, hvor den teoretiske bæreevne er optegnet for $\nu = 0.35$, er der en god overensstemmelse mellem forsøg og teori. Mindste bæreevne findes for brud 1.1 med $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, hvorfor værdien af ρ ikke indgår i bæreevnen.

Det er dog på sin plads, den gode overensstemmelse til trods, at pege på at $\nu = 0.35$ for en beton med $\sigma_c \approx 20$ MPa indikerer, at

det her ikke er lykkedes at finde den helt rigtige brudfigur.

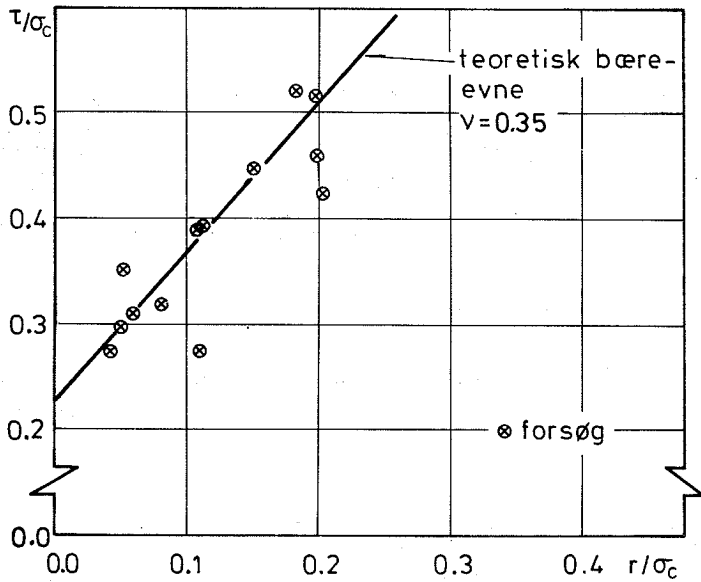


Fig.5.1.1: Forsøg af Rathkjen [72.1] med forankring af et enkelt kamstål 42, $\phi 14$ mm, $\psi = 0.0$.

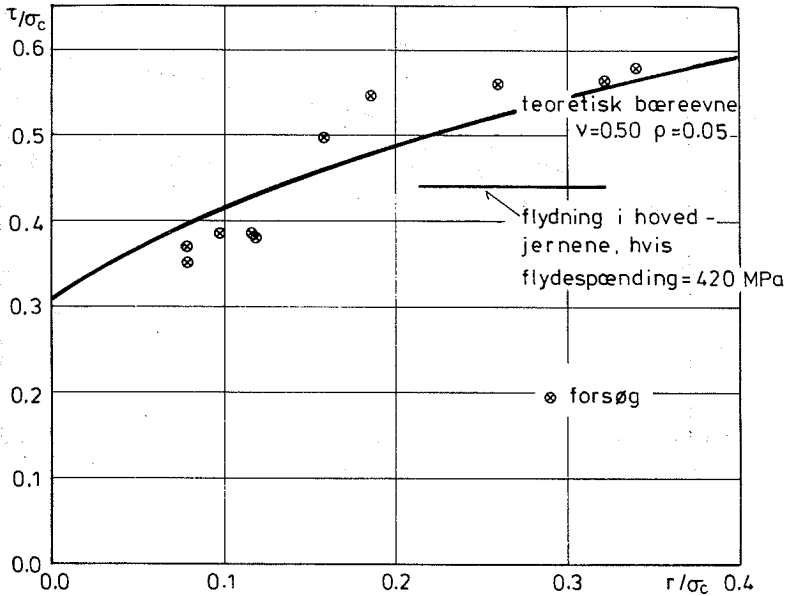


Fig.5.1.2: Forsøg af Rathkjen med forankring af to kamstål 42, $\phi 10$ mm, $\sigma_c = 20$ MPa $\psi = 0,0$.

Rathkjen [72.1] har ligeledes udført forsøg med forankringen af to jern. Figurerne 5.1.2, 5.1.3 og 5.1.4 viser, hvordan de beregnede bæreevner ligger i forhold til Rathkjens forsøg med 2 stk kamstål 42, $\phi 10$ mm, 2 stk kamstål 42, $\phi 14$ mm og 2 stk tentorstål $\phi 14$ mm. Alle emnerne var uden bøjlearmering, og betonstyrken ca 20 MPa.

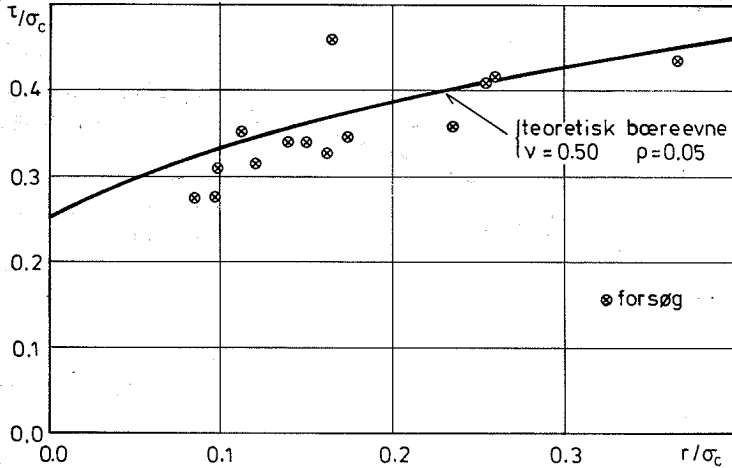


Fig.5.1.3: Forsøg af Rathkjen med forankring af to kamstål 42, $\phi 14$ mm. $\sigma_c \approx 20$ MPa, $\psi = 0.00$.

Tabel 5.1.1 Sammenligning af forsøg og den teoretiske bæreevne

Serie	v	ρ	middel teori test	Spred- teori ning test	Bemærkning
B, K 10	0,50	0,05	1,01	9,1%	Der er ikke taget hensyn til hovedjernenes flydning.
B, K 14	0,50	0,05	1,04	9,8%	
B, T 14	0,50	0,05	1,46	56%	

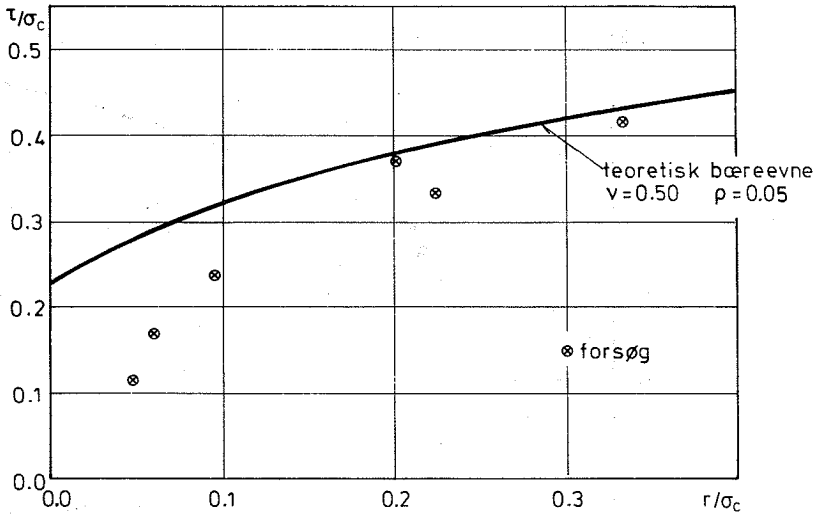


Fig.5.1.4: Forsøg af Rathkjen med forankring af to tentor-
stål $\phi 14$ mm. $\sigma_c \approx 20$ MPa , $\psi = 0.0$.

Af tabel 5.1.1 fremgår, hvordan teorien forholder sig til Rathkjen's [72.1] forsøg med K10, K14 og T14. Som det ses, er overensstemmelsen mellem teori og forsøg ikke særlig god for T14-forsøgene.

Den teoretiske bæreevne for T14 er speciel derved, at for $\frac{r}{\sigma_c} < \text{ca. } 0.05$ bliver det lokale brud omkring kammene af type 1. Ellers gælder for figur 5.1.2, 5.1.3 og 5.1.4, at det lokale brud omkring kammene er af type 2 og bjælkens brudform iøvrigt er af type 2.5.

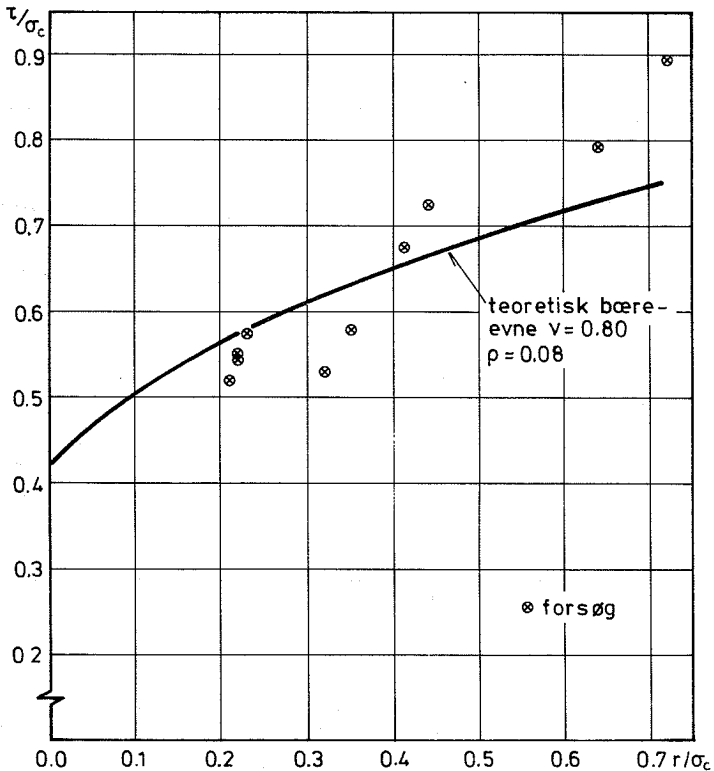


Fig.5.1.5: Forsøg af Jensen med forankring af to stk svensk KS 90, $\phi 16$ mm. Forsøg fra serie 130-133 med $\sigma_c < 20$ MPa og $\psi = 0,0$.

På figurerne 5.1.5 - 5.1.8 ses forsøgsresultater fra udtrækningsforsøg af Jensen [80.2]. For serierne 130-133 er foretaget en sortering efter betonstyrker. Ud fra forsøgene er foretaget en optimering af v og ρ . Resultaterne fremgår af tabel 5.1.2. Det bemærkes, at der også for forankring synes at være en tendens til, at større betonstyrker medfører et fald i de dimensionsløse plastiske styrker.

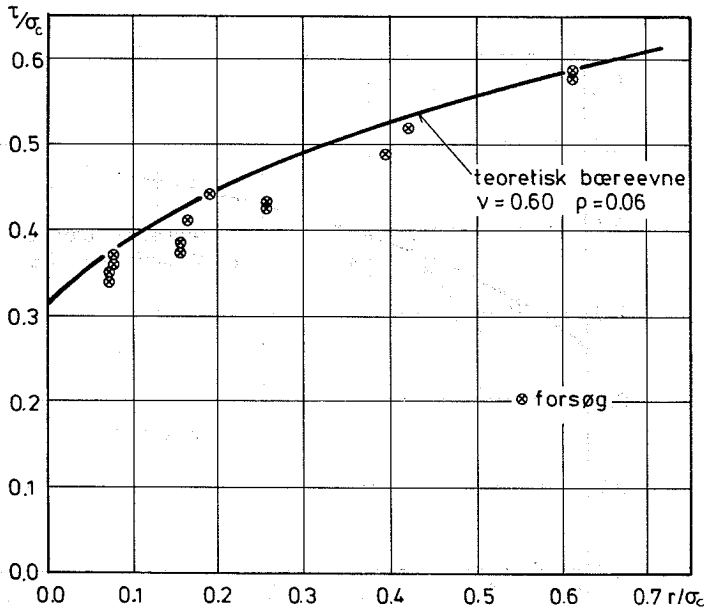


Fig.5.1.6: Forsøg af Jensen med forankring af to stk svensk KS 90, $\phi 16$ mm. Forsøg fra serie 130-133 med $20 \text{ MPa} < \sigma_c < 30 \text{ MPa}$ og $\psi = 0.0$.

Tabel 5.1.2: Optimerede v og ρ , forsøg af Jensen [80.2], serie 130-133.

σ_c	fig	v	ρ	middel <u>teori</u> test	spred- <u>teori</u> ning test
<20	5.1.5	0,80	0,08	1,01	9,7%
[20.30]	5.1.6	0,60	0,06	1,05	4,5%
[30.40]	5.1.7	0,50	0,05	1,04	7,7%
>40	5.1.8	0,50	0,05	1,10	9,3%

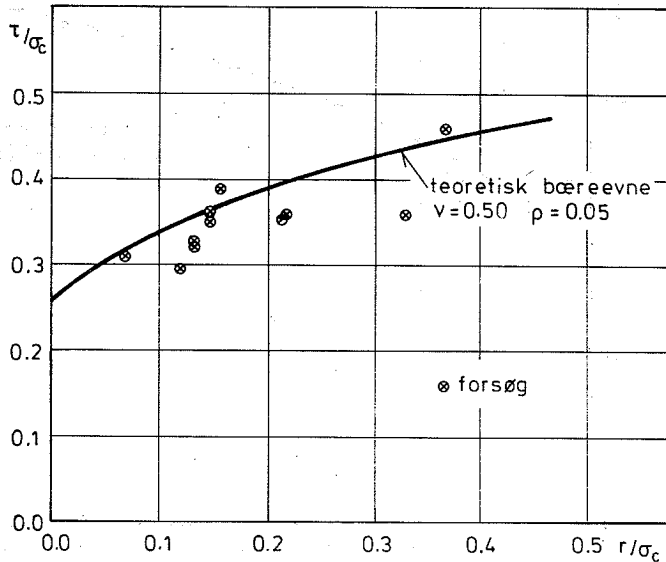


Fig.5.1.7: Forsøg af Jensen med forankring af to stk svensk KS90, $\phi 16$ mm. Forsøg fra serie 130-133 med $30 \text{ MPa} < \sigma_c < 40 \text{ MPa}$ og $\psi = 0,00$.

De teoretiske bæreevnekurver på figur 5.1.5 til 5.1.8 er baseret på bjælkebrud 2.5 kombineret med et lokalt brud omkring kammene af type 2.

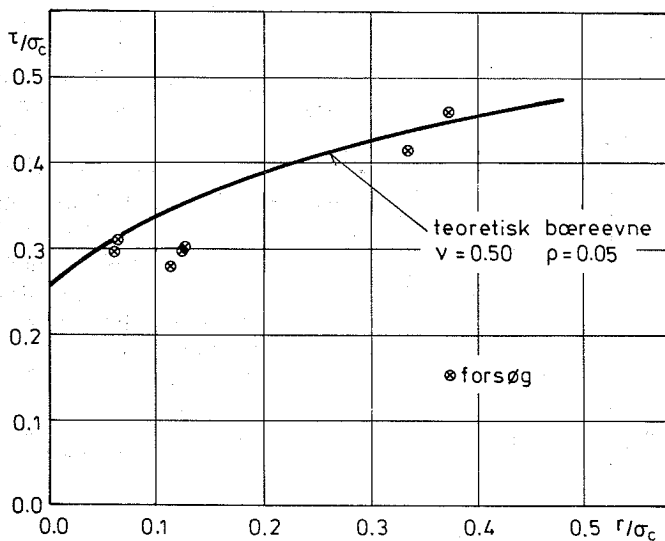


Fig.5.1.8: Forsøg af Jensen med forankring af to stk svensk KS90, $\phi 16$ mm. Forsøg fra serie 130-133 med $40 \text{ MPa} < \sigma_c$ og $\psi = 0,0$.

Rathkjen [72.1] har også udført forsøg med forankring af tre jern, serie C på fig.5.3. Det viser sig imidlertid, at emnerne ikke går i forankringerne, men i et plant brud umiddelbart over armeringen.

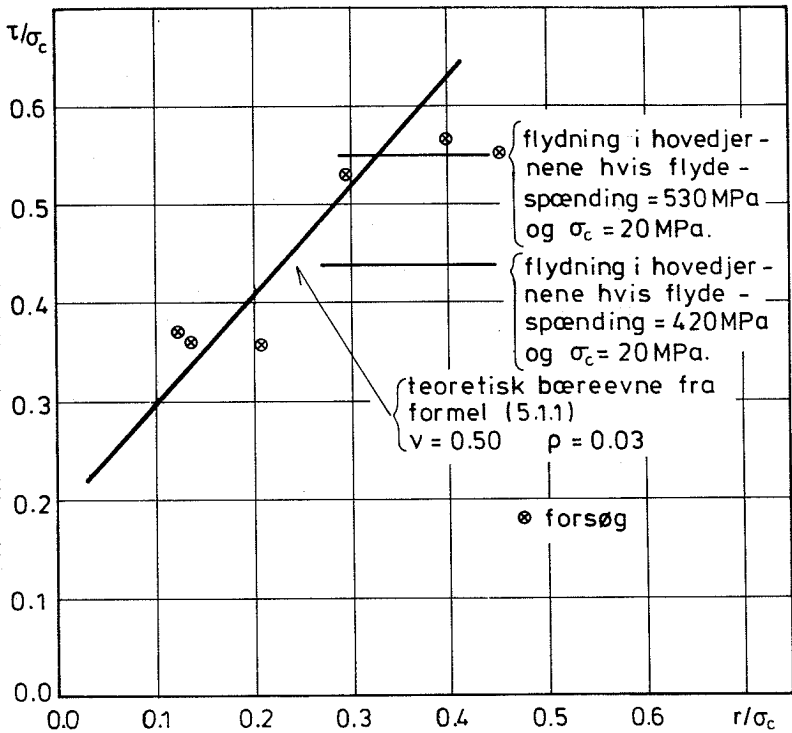


Fig.5.1.9: Forsøg af Rathkjen [72.1] med forankring af tre stk. kamstål 42, $\phi 10$ mm, $\psi = 0,0$.

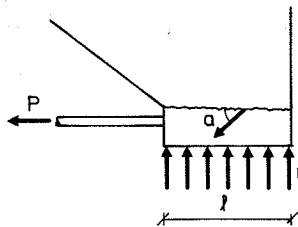


Fig.5.1.10: Brudfigur for vederlag i Rathkjens bjælke.

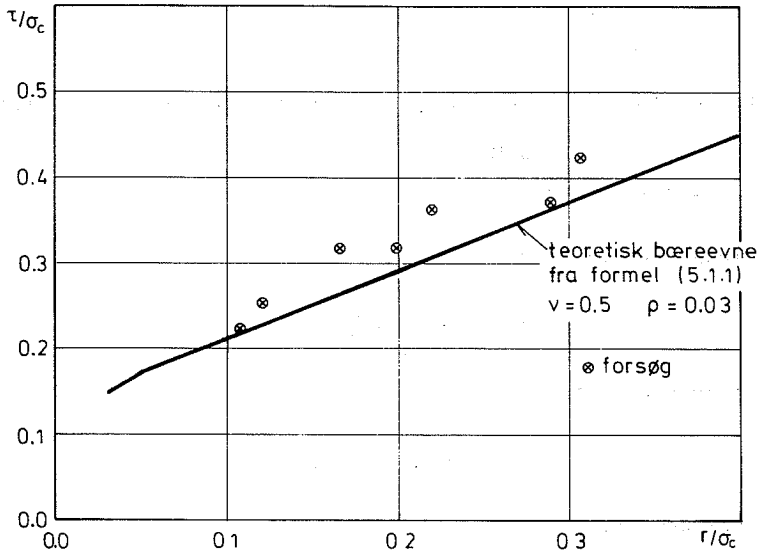


Fig.5.1.11: Forsøg af Rathkjen [72.1] med forankring af tre stk. kamstål 42, $\phi 14$ mm. $\psi = 0,0$.

Opstilles en øvre værdi svarende til den på fig.5.1.10 viste brudfigur, fås:

$$P \cos \alpha - r b l \sin \alpha = b l \frac{1}{2} \sigma_c (\lambda - \mu \sin \alpha) + 2A_b \sigma_b \sin \alpha$$

hvor $2A_b$ er det samlede bøjleareal, der krydser brudlinien
 σ_b , er bøjlernes flydespænding. Antages det, at der er forankret
 n jern, fås

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{P}{n \ell d \pi \sigma_c} = \frac{b}{n d \pi} \left[\frac{\lambda - \mu \sin \alpha}{2 \cos \alpha} + \left(\frac{r}{\sigma_c} + \frac{d}{b} \psi_\ell \right) \tan \alpha \right]$$

hvor

$$\psi_\ell = \frac{2A_b \cdot \sigma_b}{\ell d \sigma_c}$$

Differentieres med hensyn til α og kræves $\frac{\partial \frac{\tau}{\sigma_c}}{\partial \alpha} = 0$, findes:

$$\sin \alpha = \frac{\mu - 2 \left(\frac{r}{\sigma_c} + \frac{d}{b} \psi_\ell \right)}{\lambda}$$

Betingelsen $\sin \alpha \geq \sin \phi$ \Rightarrow

$$0,2\nu - 1,6 \rho \geq \frac{r}{\sigma_c} + \frac{d}{b} \psi_\ell$$

Betingelsen $\sin \alpha \leq 1$ \Rightarrow

$$- \rho \leq \frac{r}{\sigma_c} + \frac{d}{b} \psi_\ell$$

Vi får herefter:

$$\text{For } \frac{r}{\sigma_c} + \frac{d}{b} \psi_\ell \leq 0,2\nu - 1,6\rho :$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{b}{2nd\pi} \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{\mu - 2 \left(\frac{r}{\sigma_c} + \frac{d}{b} \psi_\ell \right)}{\lambda} \right)^2}$$

$$\text{For } 0,2\nu - 1,6\rho \leq \frac{r}{\sigma_c} + \frac{d}{b} \psi_\ell$$

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \frac{b}{nd\pi} \left(\frac{\nu}{4} + 0,75 \left(\frac{r}{\sigma_c} + \frac{d}{b} \psi_\ell \right) \right)$$

(5.1.1)

Bæreevnen efter (5.1.1) er indtegnet på fig.5.1.9 og fig.5.1.11.

5.2 Tværarmering og dæklag

Ved endeforankringer vil der normalt være bøjler eller anden armering, der kan udnyttes som tværarmering ved forankringen af hovedarmeringen.

Rathkjen [72.1] har udført forsøg med forankringen af to kamstål 42, $\phi 14$ mm. Der blev benyttet to forskellige former for tværarmering dels almindelig 2-snits bøjler (type E på fig.5.3), dels vandretliggende hårnålebøjler (type D på fig.5.3). På fig.5.2.1 ses resultaterne af forsøgene med emnerne af type E. Resultaterne af den teoretiske behandling med $v=0,70$ og $\rho=0,05$ er ligeledes indtegnet. Det bemærkes, at v er større end for de tilsvarende uarmerede emner omtalt i afsnit 5.1. Samme virkning af tværarmering (forskydningsarmering) fandtes ved behandlingen af forskydning i bjælker, se Nielsen et al. [78.1].

Resultaterne af forsøgene med emnerne af type D ses på fig.5.2.2 sammen med den teoretiske bæreevnekurve. Rathkjen konstaterer i [72.1], at en del af forsøgene ikke var gået i forankringen. Som det ses af fig.5.2.2, er det nærliggende at antage, at de omtalte brud har været en kombination af brud i vederlaget svarende til (5.1.1) og flydning i hovedarmeringen.

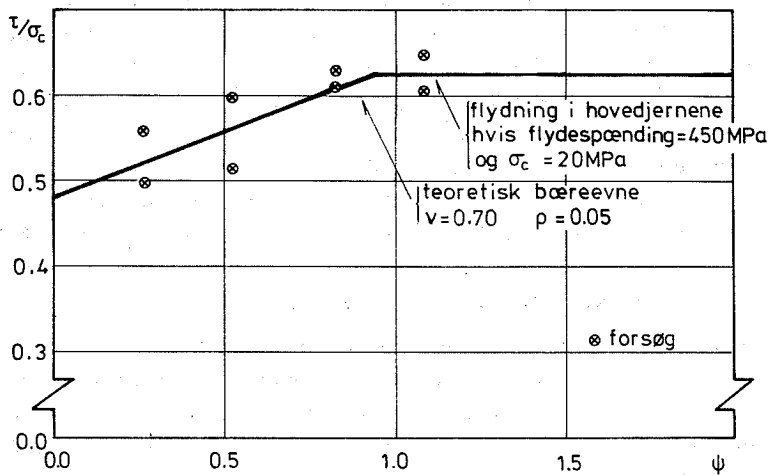


Fig.5.2.1: Forsøg af Rathkjen [72.1] med forankring af to stk kamstål 42, $\phi 14 \text{ mm}$. Forsøg type E på fig. 5.3.

Gennemsnittet af r/σ_c for forsøgene var 0,289 og spredningen 0,018. $\sigma_c \approx 20 \text{ MPa}$.

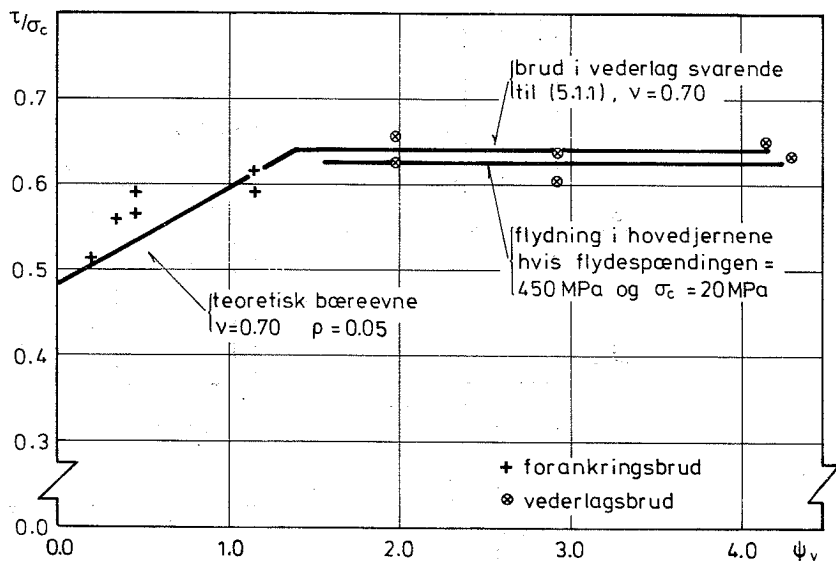


Fig.5.2.2: Forsøg af Rathkjen [72.1] med forankring af to stk kamstål 42, $\phi 14$ mm. Forsøg type D på fig. 5.3.

Gennemsnittet af r/σ_c for forsøgene var 0,301 og spredningen 0,026. $\sigma_c \approx 20$ MPa .

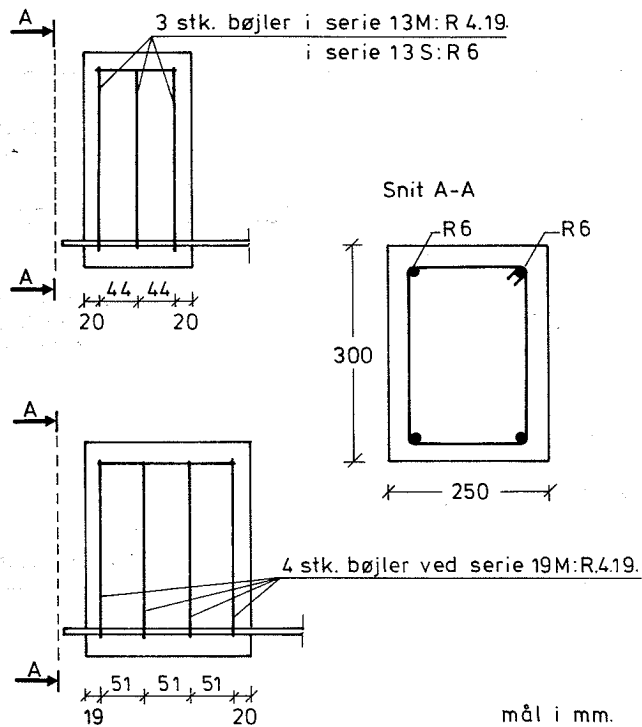


Fig.5.2.3: Forsøg af Jensen [80.2]. Udformning af emner serie 13M, 13S og 19M.

Jensen [80.2] har med samme metode som vist på fig.5.5 udført forsøg med forankring af to stk. svensk kamstål 90, $\varnothing 16$ mm. Forsøgsemnerne havde den på fig.5.2.3 viste udformning.

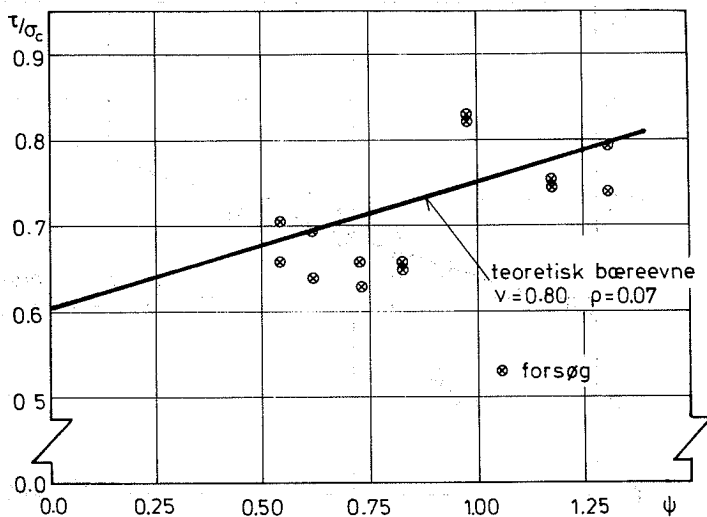


Fig.5.2.4: Forsøg af Jensen [80.2] med forankring af to stk. svensk kamstål 90, $\varnothing 16$ mm. Forsøg fra serie 13M, 13S og 19M med $\sigma_c < 20$ MPa . Gennemsnittet af τ/σ_c for forsøgene var 0,343 spredningen 0,068.

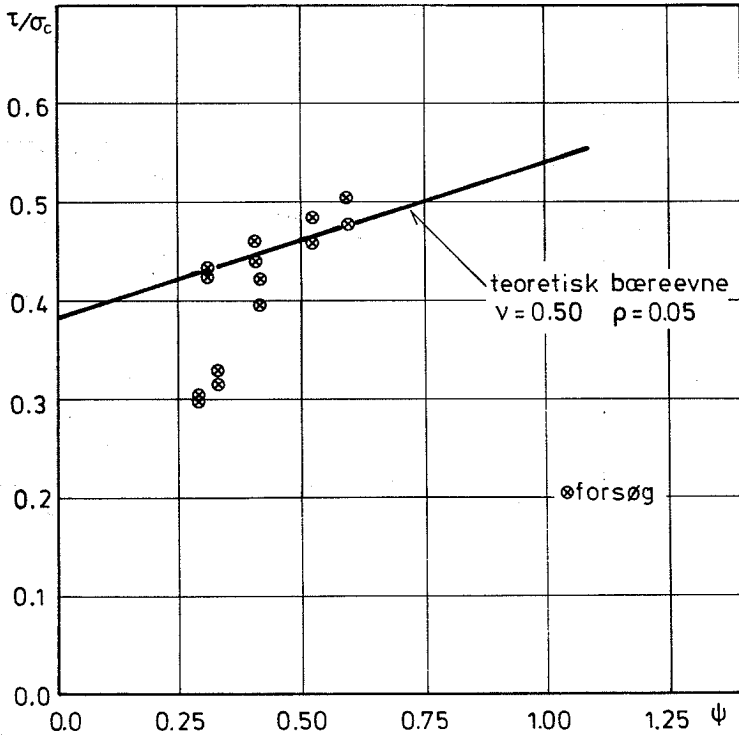


Fig.5.2.5: Forsøg af Jensen [80.2] med forankring af to stk svensk kamstål 90, $\phi 16$ mm. Forsøg fraserie 13M, 13S og 19M med $30 \text{ MPa} < \sigma_c < 40 \text{ MPa}$. Gennemsnittet af τ/σ_c for forsøgene var 0,199 og spredningen 0,047.

Resultaterne af Jensens [80.2] forsøg er vist på fig.5.2.4 og 5.2.5. Forsøgene er her sorteret efter betonstyrke, således at forsøg med $\sigma_c < 20$ MPa er vist på fig.5.2.4, og forsøg med σ_c mellem 30 MPa og 40 MPa på fig 5.2.5.

Forsøgene er benyttet til en optimering af v og ρ for de bøjle-armerede emner, se tabel 5.2.1.

Tabel 5.2.1: Optimerede v og ρ fra forsøg af Jensen [80.2], serie 13M, 19M og 13S.

σ_c	fig	v	ρ	middel	teori test	spredning	teori test
<20	5.2.4	0,80	0,07	1,05		9,9%	
30-40	5.2.5	0,50	0,05	1,07		21,1%	

Der er samme tendens som for de ikke armerede emner. v og ρ falder med stigende betonstyrke. Derimod er v og ρ ikke her større for de armerede emner end for de uarmerede, som det derimod var tilfældet for Rathkjens forsøg.

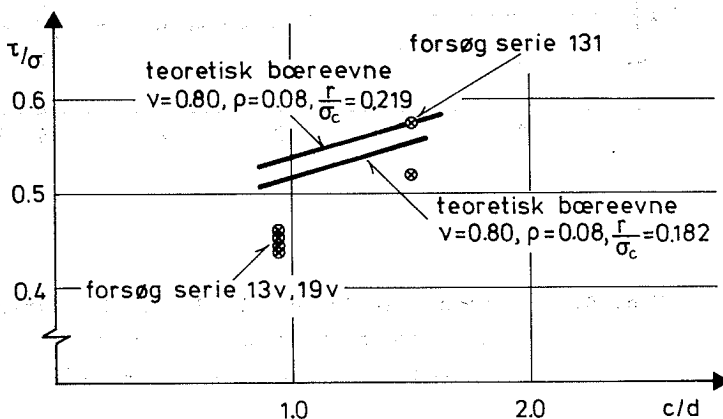


Fig. 5.2.6: Forsøg af Jensen [80.2] med forankring af to stk. svensk kamstål 90 ϕ 16 mm.
Forsøg fra serie 13V, 19V og 131.

Jensen [80.2] har også udført enkelte forsøg, hvor dæklagene er varieret. I serierne 13V og 19V er c varieret og i serierne 13H og 19H er c_1 varieret. Forsøgsemnet er det samme som vist i figur 5.5, blot med ændrede dæklag.

På fig. 5.2.6 og 5.2.7 er forsøgene vist sammen med forsøg fra serie 131, med samme betonstyrke og tilnærmelsesvis samme vederlagstryk. Figur 5.2.6 viser en bæreevnekurve for $\frac{r}{\sigma_c} = 0.219$ svarende til gennemsnittet for de to forsøg fra serie 131 og en bæreevnekurve for $\frac{r}{\sigma_c} = 0.182$ svarende til gennemsnit for de fire forsøg fra serie 13V og 19V.

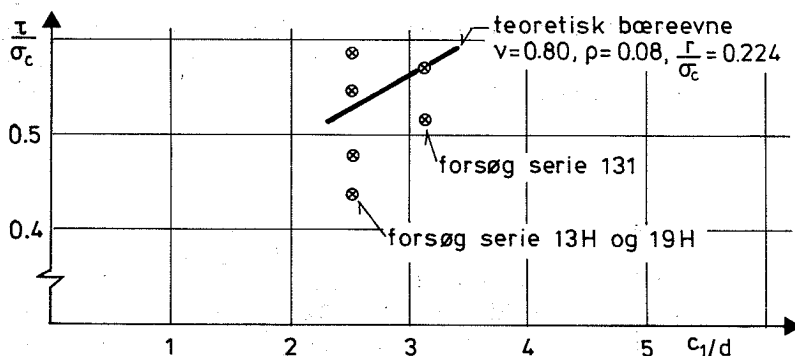


Fig. 5.2.7: Forsøg af Jensen [80.2] med forankring af to stk. svensk kamstål 90 ϕ 16 mm.
 Forsøg fra serie 13H, 19H og 131.

På figur 5.2.8 er kun indtegnet en bæreevnekurve for $\frac{r}{\sigma_c} = 0.224$ svarende til gennemsnittet for de seks viste forsøg, de to samme forsøg fra serie 131 som vist i figur 5.2.7 samt fire forsøg fra serie 13H og 19H.

6. STYRKE AF STØD

6.1 Stød med 2 og 3 jern

I litteraturen kan man finde mange forsøg med armeringsstød i bjælker. Langt de fleste forsøg er udført for at undersøge godheden af diverse normer eller andre dimensioneringsregler, hvilket medfører, at man har været tilfreds, når man opnåede flydning i de stødte jern, inden der opstod brud i selve stødet. Man har altså den noget groteske situation, at der eksisterer et enormt antal stødforsøg, hvoraf dog kun en uhyggelig lille del her kan bruges til at undersøge godheden af den plastiske beregningsmodel.

For eksempel har Bergholdt [74.1] udført forsøg for at undersøge stødreglerne i DS 411. Kun i fem ud af 15 forsøg opnåedes brud i stødet. I resten flød hovedarmeringen først. Som det også fremgår af fig.6.1.1 lå alle forsøg nær ved grænsen til flydning i hovedarmeringen. Den på fig.6.1.1 indtegnede grænse svarer til armeringens flydespænding, der er lig 520 MPa og gennemsnittet af de målte betonstyrker $\sigma_c = 23,3 \text{ MPa}$.

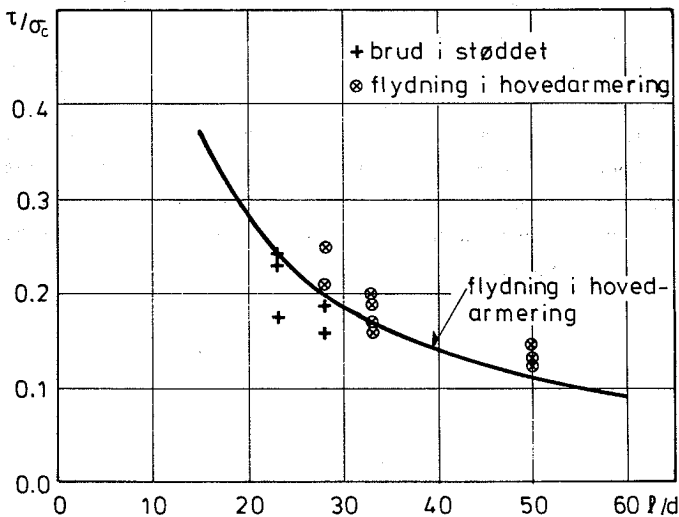


Fig.6.1.1: Stødforsøg af Bergholdt [74.1].

Tepfers [73.1] refererer et stort antal stødforsøg. Desværre vil kun en mindre del af dem umiddelbart kunne behandles efter de her opstillede formler.

For eksempel er en hel del af stødene omgivet af en tværarmering bestående af en spiral. Sådanne forsøg kan ikke behandles ved hjælp af de her benyttede brudfigurer. De må alle ændres, således at der tages specielle hensyn til betonbruddet inden for spiralen. Derudover vil metoden og store dele af virkemåden i de enkelte brudfigurer kunne anvendes.

Tepfers undersøger også bæreevnens afhængighed af stødets længde, og benytter dertil dele af forsøgsserierne 123 og 657. Plottes de to uddrag af serie 123 og 657 på samme figur (fig.6.1.2), ses, at forsøgene med tværarmering ikke skiller sig signifikant ud fra den samlede mængde forsøg. Helt modsat af hvad man ville forvente og hvad vi hidtil har set. Det skal endelig bemærkes, at Tepfers i sin afhandling [73.1] angående indflydelsen af bøjler på et støds bæreevne på grund af for få forsøg kun anfører, at bæreevnen stiger, når bøjlearealet stiger. Han må af en eller anden grund have kaseret en del af sine egne forsøg.

Når der ses bort fra Tepfers forsøg, er det yderst småt med stødforsøg, hvor tværarmeringen er bøjler. En del af forklaringen er, at langt fra alle normer stiller krav om tværarmering i stødzoner. Der er således ingen krav om tværarmering i den amerikanske betonnorm, hvilket medfører, at selv om der er udført mange stødforsøg i USA, er kun ganske få af prøvelegemerne forsynet med tværarmering omkring stødet.

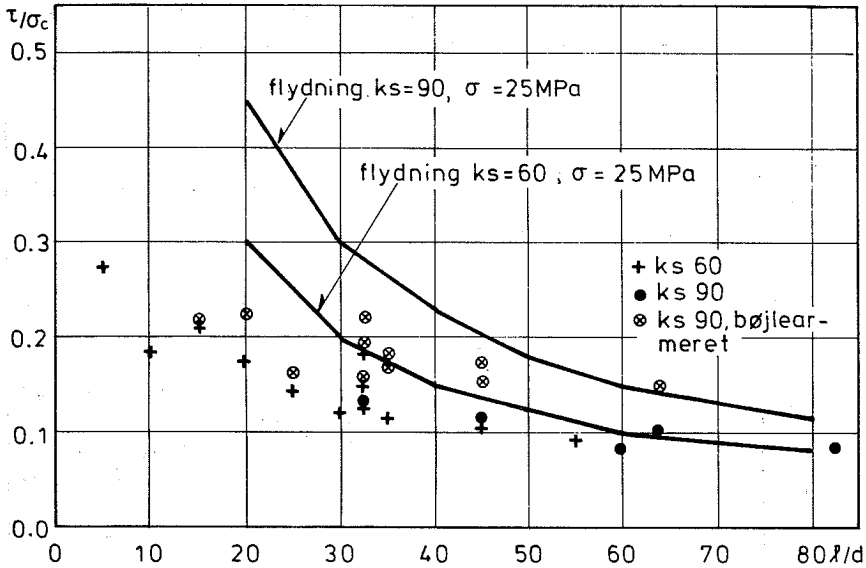


Fig.6.1.2: Stødforsøg fra Tepfers [73.1]. Dele af serie 123 og 657 (bjælker med 2 jern).

6.2 Stød med flere end 3 jern

Thompson et al. [75.3] har udført forsøg med bjælker, hvor der er stød i 5 eller 6 jern. På fig.6.2.1 er forsøgene plottet som funk-

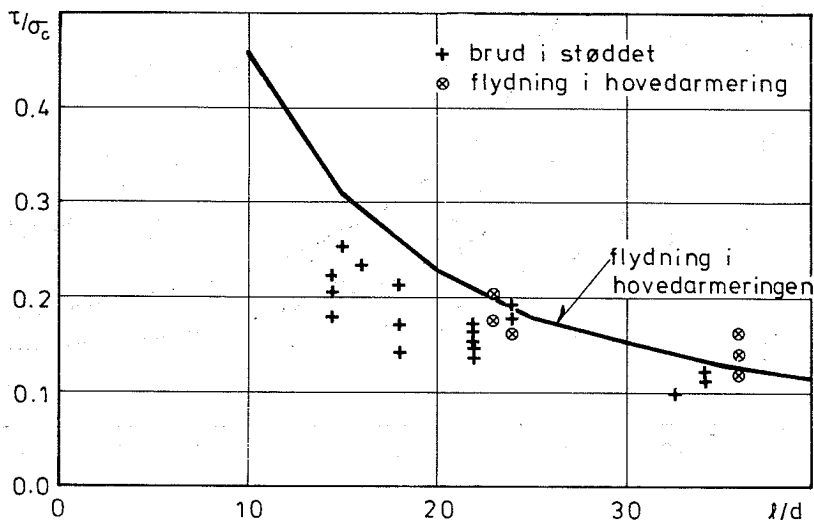


Fig.6.2.1: Stødforsøg af Thompson et al. [75.3].

tion af den dimensionsløse stødlængde l/d . Grænsekurven svarende til flydning i hovedarmeringen er ligeledes indtegnet. Kurven er beregnet for hovedarmeringens gennemsnitlige flydespænding og betonens gennemsnitlige trykstyrke.

Af tabel 6.2.1 fremgår inddata til og resultatet af en gennemregning af 6 af de 8 forsøg med $l/d < 20$ efter den i afsnit 4.10 beskrevne tilnærmede metode. Af de to ikke gennemregnede forsøgsemner havde det ene spiralarmering omkring stødene, og i det andet var kun 4 af de 6 jern stødt. Disse to tilfælde kan ikke umiddelbart beregnes efter (4.10.2).

I øvrigt bemærkes, at selv om v og ρ ikke er skønnet lavt, bliver resultaterne alligevel rimelige.

Tabel 6.2.1: Gennemregning af enkelte af forsøgene fra Thompson et al. [75.3] ved hjælp af den tilnærmede metode (4.10.2).

Emne	ℓ [m]	d [m]	ℓ/d	Antal støtte jern	s [m]	c [m]	c_1 [m]	b [m]	$A_{bøjle}$ [m ²]	$\sigma_{bøjle}$ [MPa]	Test τ/σ_c	ν	ρ	Be- reg- ning τ/σ
6-12-4/2/2-6/6	0,305	0,0191	16	6	0,102	0,0508	0,0508	0,838	0	-	0,235	0,40	0,04	0,196
8-18-4/3/2-6/6	0,457	0,0254	18	6	0,102	0,0762	0,0508	0,914	0	-	0,171	0,40	0,04	0,161
8-15-4/2/2-6/6-S5	0,381	0,0254	15	6	0,102	0,0508	0,0508	0,914	$1,28 \cdot 10^{-3}$	460	0,256	0,40	0,04	0,285
11-25-6/2/3-5/5	0,635	0,0358	18,18	5	0,152	0,0508	0,0762	1,119	0	-	0,143	0,40	0,04	0,166
11-20-4/2/2-6/6-S5	0,508	0,0358	14,55	6	0,102	0,0508	0,0508	1,038	$1,74 \cdot 10^{-3}$	473	0,181	0,40	0,04	0,234
11-20-4/2/2-6/6-S2,9	0,508	0,0358	14,55	6	0,102	0,0508	0,0508	1,038	$2,144 \cdot 10^{-3}$	473	0,205	0,40	0,04	0,249

Data for armeringen er taget fra

ASTM A305-65, ASTM Book of Standards 1968, part 4.

7. DISKUSSION OG KONKLUSION

Formålet med projektet har som tidligere nævnt hovedsagelig været at undersøge, om den stiftplastiske materialemodel for beton ville give anvendelige resultater ved forankringsproblemet.

M.P.Nielsen et al. har i "Concrete Plasticity" [78.1] vist, at forskydningsproblemerne i jernbetonbjælker og betonfuger samt gennemlokning af jernbetonplader kan løses ved hjælp af en stiftplastisk materialemodel for betonen. Resultaterne i de forudgående afsnit viser, at plasticitetsteorien også for forankringer giver anvendelige resultater.

Den opstillede brudmodel giver således en rimelig forklaring på forholdene i forbindelse med det lokale brud. Kamhøjdens indflydelse på bæreevnen viser sig således at være ret begrænset, hvilket også er konstateret ved forsøg. Forsøg viser, at når kammenes stigningsvinkel (vist på fig.7.1) passerer ca 40° , ændrer det lokale brud karakter. Modellen giver, at det lokale brud vil være et betonbrud, når stigningsvinklen er større end 37° , ellers vil bruddet være et rent adhæsionsbrud på armeringsjernet overflade.

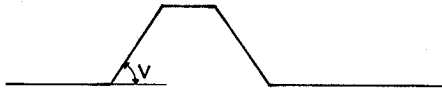


Fig.7.1: Snit i forkammet armeringsjern, kammenes stigningsvinkel v .

Undersøgelsens hovedvægt ligger på forankringsproblemet, der også for det meste vil være det mest påtrængende. Hvis man ønsker at udnytte de plastiske metoder ved undersøgelsen af bjælkers bæreevne skal man også kunne eftervise, at forankringen er i orden. Med de til tider små lejevidder er dette umuligt, hvis man kun henholder sig til betonnormens anvisninger. Derimod er stød sjældent et problem ved en sådan gennemgang. De færreste konstruktører

føler sig således presset til at spare på stødlængderne hvorimod lejevidderne ikke sjældent er skåret ned under det minimum, man ville få ved en efterleven af betonnormen.

Da langt de fleste forsøg omhandler forankring af to jern i en rektangulær bjælke, er denne del af afhandlingen også den bedst dokumenterede. Behandlingen af bjælker med et enkelt forankret jern støtter sig udelukkende på forsøg af Rathkjen [72.1], og de teoretiske resultater er således kun sammenlignet med disse forholdsvist få forsøg.

Generelt må overensstemmelsen mellem forsøg og teori for forankringsernes vedkommende siges at være tilfredsstillende. Man kan på samme måde, som det har været tilfældet ved den plastiske behandling af forskydningsproblemet i bjælker og gennemlokningsproblemet (se M.P.Nielsen et al. [78.1]), også ved forankring konstatere, at de dimensionsløse plastiske betonstyrker (v og ρ) har en faldende tendens, når betonstyrken stiger.

Hvis man ønsker at sammenligne stødforsøg med beregnede bæreevner, støder man på det problem, at i langt de fleste stødforsøg har de stødte jern flydt - eller så godt som flydt - , inden bruddet sker. Den slags resultater er også udmærkede, når man vil undersøge en eller anden dimensioneringsregel for stød. I så fald er stødet og dimensioneringsreglen jo i orden, når blot man opnår flydning i de stødte jern, inden stødene bryder. Her vil den slags forsøg imidlertid være uden interesse. Det meget store antal stødforsøg til trods, vil der således kun være få forsøg, der kan benyttes til verifikation af en brudberegning.

Som noget positivt må det bemærkes, at den tilnærmede beregning af forsøg af Thompson et.al. [75.3] med stød i 5 eller 6 jern giver rimelige resultater. Man kan altså komme langt med ret simple brudfigurer og få udregninger.

Denne rapport kan kun betragtes som starten til løsningen af forankrings- og stødproblemet ved hjælp af plastiske beregningsmetoder. Der er således stadig en hel del uløste problemer. I en ikke

prioriteret rækkefølge kan nævnes.

Vedrørende forankring:

Man bør prøve at samle alle tilgængelige forsøg og ad statistisk vej undersøge v og ρ på samme måde, som det er blevet gjort ved forskydning i bjælker og gennemlokning af plader.

Der bør udføres forsøg med forskellige dæklag .

Problemet med forankring af jern i flere lag er uløst. Der bør konstrueres brudfigurer, og den teoretiske fundne bæreevne sammenlignes med forsøg. Man vil eventuelt være nødt til at udføre egne forsøg.

Vedrørende stød:

Endebidraget bør afklares teoretisk.

Man bør starte stødforsøg, hvor man bevidst stræber efter brud i stødet. Det ville så blive muligt at foretage grundige sammenligninger mellem teori og forsøg.

Generelt:

Man kan også gå i gang med en forsøgsserie for at finde ud af, hvordan stød/forankringer opfører sig, når tværarmeringen bliver ekstrem stærk. Hvilken indflydelse har det, om tværarmeringsarealet består af få tykke jern eller mange tynde? Umidelbart kunne man formode, at tværarmeringsarealet fordelt ud på tynde jern måtte give den bedste overensstemmelse med teorien, der tværer tværarmeringen jævnt ud over stød/forankringslængden. Teoretisk skulle der ikke være forskel, om tværarmeringen består af få tykke - eller mange - tynde jern.

Samlet kan man konkludere, at man også ved beregninger af styrken af forankringer kan anvende en stiftplastisk materialemodel for beton og få rimelige resultater. Fordelene ved en sådan metode er, at det i modsætning til rent empiriske metoder kan forsvares også at anvende beregningsprincipperne uden for de områder man har kontrolleret med forsøg.

LITTERATUR

- [13.1] Abrams, D.A.:
Test of Bond between Concrete and Steel.
University of Illinois, Engineering Experiment Station,
Bulletin No.71, Dec 1913.
- [61.1] Rehm, G.:
Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und
Beton.
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 138, Berlin
1961.
- [65.1] Untrauer, R.E. & R.L.Henry:
Influence of Normal Pressure on Bond Strength.
Journal of the ACI, Vol.62, May 1965, pp.577-586.
- [66.1] Ludz, L.A.:
The Mechanics of Bond and Slip of Deformed Reinforcing
Bars in Concrete.
Report No.324. Department of Structural Engineering.
School of Civil Engineering, Cornell University, Aug 1966.
- [69.1] Ferguson, P.M. & E.A.Briceno:
Tensile lap splices, Part I: Retaining wall type,
varying moment zone.
Research report. Report No.:RR-113-2, Texas University,
Austin. Center for Highway Research, July 1969.
- [70.1] ACI Committee 408. Opportunities in bond research.
ACI Journal, Nov 1970, pp.857-867.
- [71.1] Ferguson, P.M. & C.N.Krishnaswamy:
Tensile lap splices, Part II: Design Recommendations
for Retaining Wall Splices and Large Bar Splices.
Report No.RR 113-3. Texas University, Austin. Center
for Highway Research, Apr.1971.

- [72.1] Rathkjen, A.:
Forankringsstyrke af armeringsjern ved bjælkeunderstøtninger.
Rapport 7203. Danmarks Ingeniørakademi, Bygningsafdelingen, Aalborg 1972. Ren & Anvendt Mekanik.
- [73.1] Tepfers, R.:
A theory of Bond Applied to Overlapped Tensile Reinforcement Splices for Deformed Bars. Publication 73:2.
Division of Concrete Structures, Chalmers Tekniska Högskola Göteborg, 1973.
- [73.2] Dansk Ingeniørforenings Norm for Betonkonstruktioner.
Dansk Standard DS 411, 2.udgave, december 1973 (norm og vejledning).
- [74.1] Bergholdt, M.:
Forankringsforsøg med 10 mm kamstål. Rapport nr.74:46.
Ren & Anvendt Mekanik, Danmarks Ingeniørakademi, Bygningsafdelingen, København, maj 1974.
- [74.2] Dörr, K., G.Melhorn, W.Stauder & D.Uhlisch:
Berechnung von Stahlbetonscheiben im Zustand II bei Annahme eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens.
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 238, pp.51-96.
- [75.1] Lange-Hansen, P.:
Generel plasticitetsteori I. Forelæsningsnotat nr.F 55.
Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole 1975.
- [75.2] Lange-Hansen, P.:
Generel plasticitetsteori II. Forelæsningsnotat nr.F 56.
Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, 1975.
- [75.3] Thompson, M.A., J.O.Jirsa, J.E.Breen & D.F.Meinheit:
The behaviour of multiple lap splices in wide sections.
Research report 154-1, project 3-5-72-154.
Center for Highway Research, The University of Texas at Austin, January 1975.

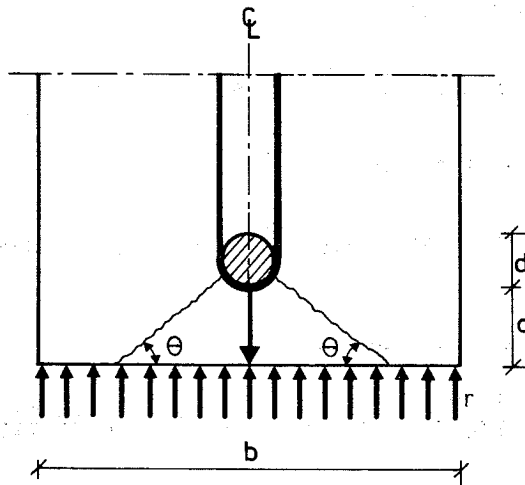
- [75.4] Orangun, C.O., J.O.Jirsa & J.E.Breen:
The strength of anchor bars: A reevaluation of test data on development length and splices.
Research report 154-3F, project 3-5-72-154.
Center for Highway Research, The University of Texas at Austin, January 1975.
- [76.1] Jensen, B.Chr.:
Nogle plasticitetsteoretiske beregninger af beton og jernbeton. Rapport nr.111. Instituttet for Husbygning, Danmarks tekniske Højskole, 1976.
- [76.2] Bræstrup, M.W., M.P.Nielsen, B.Chr. Jensen & F.Bach:
Axisymmetric Punching of Plain and Reinforced Concrete. Rapport nr.R 75. Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, 1976.
- [76.3] Orr, D.M.F.:
Lap Splicing of Deformed Reinforcing Bars.
Journal of the ACI, Vol.73, No.11, Nov.1976, pp.622-627.
- [78.1] Nielsen, M.P., M.W.Bræstrup, B.Chr. Jensen & F.Bach:
Concrete Plasticity. Beam Shear - Shear in Joints - Punching Shear.
Specialpublikation udgivet af Dansk Selskab for Bygningsstatik, Lyngby, oktober 1978.
- [78.2] Forslag til Dansk Standard, DS 2082.
Udkast 5, april 1978.
- [78.3] Hess, Uwe, B.Chr.Jensen, M.W.Bræstrup, M.P.Nielsen & Finn Bach:
Gennemlokning af jernbetonplader. Rapport nr.R 90. Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, 1978.
- [79.1] Exner, H.:
On the Effectiveness Factor in Plastic Analysis of Concrete.
IABSE Colloquium Copenhagen 1979. Plasticity in Reinforced Concrete, Final Report, pp.35-42.

- [79.2] Soretz, S & H.Hölzenbein:
Influence of Rib Dimensions of Reinforcing Bars on Bond and Bendability.
Journal of the American Concrete Institute, Vol.76, No.1, January 1979, pp.111-125.
- [79.3] Kemp, E.L. & W.J.Wilhelm:
Investigation of the Parametres Influencing Bond Cracking.
Journal of the ACI, Vol.76, No.1, Jan.1979, pp.47-71.
- [80.1] Hess, U., S.B.Christensen, M.P.Nielsen:
Forsøg vedrørende forankringsstyrken for kamstål ved forskellige tværarmeringsudformninger.
Rapportserie I, No.69. Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, 1981.
- [80.2] Jensen, J.H.:
Forkammede armeringsstængers forankring specielt ved vederlag.
Licentiatafhandling, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby.
1. del Rapport R 155, 1982
2. del Appendix A til F, Rapport R 156, 1982.

APPENDIX 1.

BJÆLKER MED 1 JERN.

Appendix 1.1 Bjælke med et jern, brud 1.



For bruddet omkring hovedjernet anvendes samme betegnelse, som i afsnit 3.1.

Det ydre arbejde:

Kraftens arbejde:

$$w_e = P \cdot \cos \alpha$$

Reaktionens arbejde:

$$w_e = -r \cdot 2(c + \frac{d}{2}) \cot \theta \cdot l \cdot 2 \sin \alpha$$

Det indre arbejde:

Bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \arctan \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+k) \pi \frac{k}{\sin \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \arctan \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+2k - a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

Bidrag fra brudlinierne:

$$w_i = 2 \cdot \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) l \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \cos \theta) + \sigma_t \frac{\cos \theta - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} 2 \sin \alpha$$

Bidrag fra bøjlerne:

$$w_i = 2 A_{bl} \cdot \sigma_b \cdot \sin \alpha$$

Sættes det ydre arbejde lig det indre fås:

$$\frac{P}{2 \frac{d}{d\pi} \sigma_C} = \frac{\tau}{\sigma_C} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{(d+k)k}{d \cdot a \cos \alpha \sin \gamma} \left\{ \frac{\nu}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \\ \\ 0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{d + 2k - a \tan \gamma}{d \cos \gamma \cos \alpha} \left\{ \frac{\nu}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \end{array} \right\}$$

$$+ \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) \frac{4 \tan \alpha}{d\pi} \left\{ \frac{\nu}{2} (1 - \cos \theta) + \rho \frac{\cos \theta - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{2A_b \sigma_b}{2 d \sigma_C} \tan \alpha$$

$$+ \frac{4}{d\pi} \left(c + \frac{d}{2} \right) \cot \theta \tan \alpha \frac{r}{\sigma_C}$$

Da der antages plan spændingstilstand i det viste snit i bjælken gælder ud over de i afsnit 3.1 omtalte restriktioner på α og γ at $\theta \leq 90 - \varphi$.

Bæreevnen kan også udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_C} = \min. \left\{ \begin{array}{l} D\nu \frac{0.8}{\sin(\varphi - 2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi + \gamma) \\ \frac{1}{2} F\nu + \frac{3}{4} C \end{array} \right\}$$

$$\text{hvor: } \cot \gamma = \frac{1}{4} (3 + 5 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{D\nu}})$$

$$C = \frac{4}{d\pi} \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) \left\{ \frac{\nu}{2} (1 - \cos \theta) + \rho \frac{\cos \theta - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \psi_b + \frac{4}{d\pi} \left(c + \frac{d}{2} \right) \cot \theta \frac{r}{\sigma_C}$$

$$D = \frac{(d+k)k}{2d \cdot a}$$

$$F = \frac{d + 2k}{2d}$$

the first of these is the fact that the

the second is the fact that the

the third is the fact that the

the fourth is the fact that the

the fifth is the fact that the

the sixth is the fact that the

the seventh is the fact that the

the eighth is the fact that the

the ninth is the fact that the

the tenth is the fact that the

the eleventh is the fact that the

the twelfth is the fact that the

the thirteenth is the fact that the

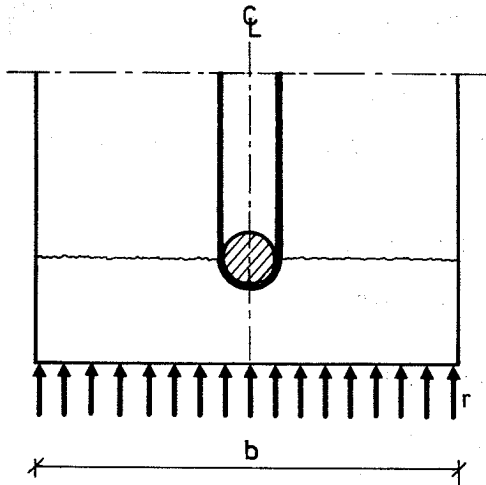
the fourteenth is the fact that the

the fifteenth is the fact that the

the sixteenth is the fact that the

the seventeenth is the fact that the

Appendix 1.2. Bjælke med et jern, brud 2.



For bruddet omkring hovedjernet anvendes samme betegnelser som i afsnit 3.1.

Det ydre arbejde:

Kraftens arbejde:

$$w_e = P \cdot \cos \alpha$$

Reaktionens arbejde:

$$w_e = -r \cdot b \cdot l \cdot 2 \sin \alpha$$

Det indre arbejde:

Bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+k) \pi \frac{k}{\sin \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+2k - a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

Bidrag fra brudlinierne:

$$w_i = (b-d) l \cdot \sigma_t \cdot 2 \sin \alpha$$

Bidrag fra bøjlerne:

$$w_i = 2A_{bl} \cdot \sigma_b \cdot \sin \alpha$$

Sættes det ydre arbejde lig det indre fås:

$$\frac{P}{l d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\sigma_c} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{(d+k)k}{d a \cos \alpha \sin \gamma} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \\ \\ 0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{d+2k - a \tan \gamma}{d \cos \gamma \cos \alpha} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \\ + \frac{2(b-d)}{\pi} \frac{l}{d} \sigma_t \tan \alpha + \frac{1}{\pi} \frac{2A_{bl}}{l d} \frac{\sigma_b}{\sigma_c} \tan \alpha \\ + \frac{2}{\pi} \frac{b}{d} \frac{\tau}{\sigma_c} \tan \alpha \end{array} \right\}$$

Bæreevnen kan også udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \min \left\{ \begin{array}{l} D v \frac{0.8}{\sin(\varphi + 2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi + \gamma) \\ \frac{1}{2} F v + \frac{3}{4} C \end{array} \right\}$$

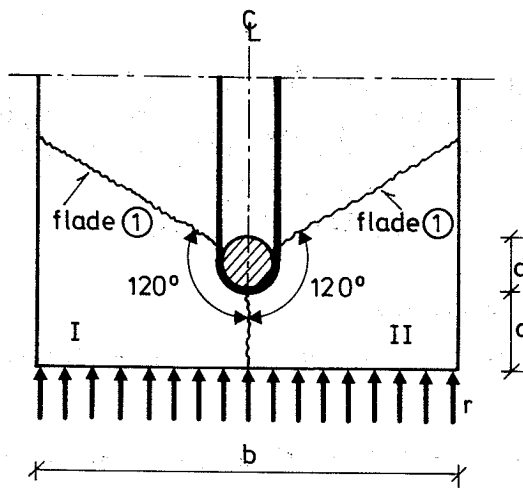
$$\text{hvor: } \cot \gamma = \frac{1}{4} (3 + 5 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{Dv}})$$

$$C = \frac{2(b-d)}{\pi d} \rho + \frac{\psi_l}{\pi} + \frac{2b}{\pi d} \frac{r}{\sigma_c}$$

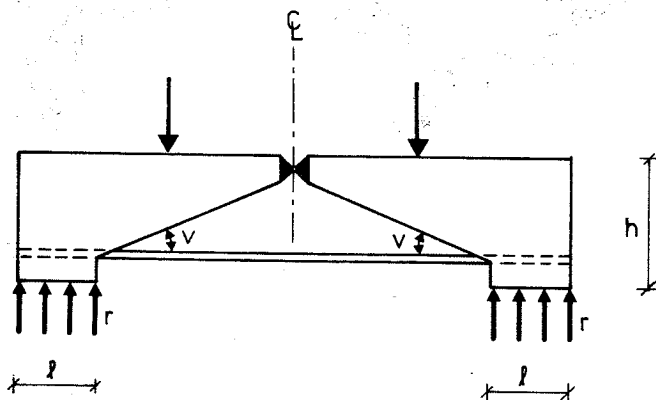
$$D = \frac{(d+k)k}{2d a}$$

$$F = \frac{d+2k}{2d}$$

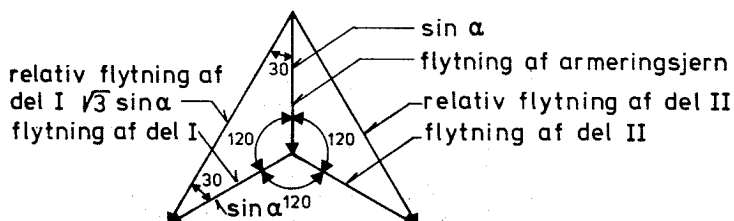
Appendix 1.3 Bjælke med et jern, brud 3.



Set fra siden har bjælken det viste udseende:



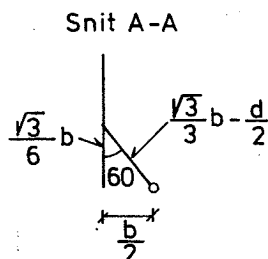
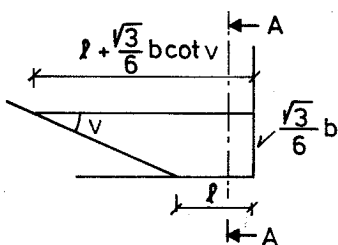
De relative flytninger mellem bruddets enkelte dele:



De relative bevægelser:

Med den valgte brudfigur er der rent adskillelsesbrud i alle 3 brudflader.

Med en bjælke som vist vil flade ① få det nedenfor viste udseende:



Areal af flade ① :

$$F_{①} = \frac{1}{2} \left(2l + \frac{\sqrt{3}}{6} b \cot v \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} b - \frac{d}{2} \right)$$

For bruddet omkring hovedjernet anvendes samme betegnelser, som benyttes i afsnit 3.1.

Det ydre arbejde:

Kraftens arbejde:

$$w_e = P \cdot \cos \alpha$$

Reaktionens arbejde:

$$w_e = -r \cdot b \cdot l \cdot \sqrt{3} \sin \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Det indre arbejde:

Bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \arctan \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d + k) \pi \frac{k}{\sin \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \arctan \left(\frac{k}{a} \right):$$

$$w_i = (d + 2k - a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

Bidrag fra brudlinjerne:

$$w_i = 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(2l + \frac{\sqrt{3}}{6} b \cot v \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} b - \frac{d}{2} \right) \sqrt{3} \sin \alpha \cdot \sigma_t + c \cdot l \cdot \sqrt{3} \sin \alpha \cdot \sigma_t \right\}$$

Bidrag fra bøjlerne:

$$w_i = 2 A_{bl} \cdot \sigma_b \cdot \sin \alpha$$

Sættes det ydre arbejde lig det indre fås:

$$\frac{P}{2d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\sigma_c} = \begin{cases} \gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right): \\ \frac{(d+k)k}{d \cdot a \cdot \cos \alpha \sin \varphi} \left\{ \frac{\nu}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \\ 0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{d+2k-a \tan \gamma}{d \cos \gamma \cos \alpha} \left\{ \frac{\nu}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \end{cases}$$

$$+ (2\ell + \frac{\sqrt{3}}{6} \cot \nu) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} b - \frac{d}{2} \right) \frac{\sqrt{3} \tan \alpha}{2d \pi} \rho + \frac{\sqrt{3} c}{\pi d} \rho \tan \alpha$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{2 A_{bl} \sigma_b}{2d \sigma_c} \tan \alpha$$

$$+ \frac{3b}{2d \pi} \tan \alpha \frac{r}{\sigma_c}$$

Bæreevnen kan også udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \min \left\{ D\nu \frac{0.8}{\sin(\varphi + 2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi + \gamma) \right. \\ \left. \frac{1}{2} F\nu + \frac{3}{4} C \right\}$$

hvor: $\cot \gamma = \frac{1}{4} (3 + 5 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{D\nu}})$

$$C = (2\ell + \frac{\sqrt{3}}{6} \cot \nu) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} b - \frac{d}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2d \pi} \rho + \frac{\sqrt{3} c}{\pi d} \rho +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \psi \ell + \frac{3b}{2d \pi} \frac{r}{\sigma_c}$$

$$D = \frac{(d+k)k}{2da}$$

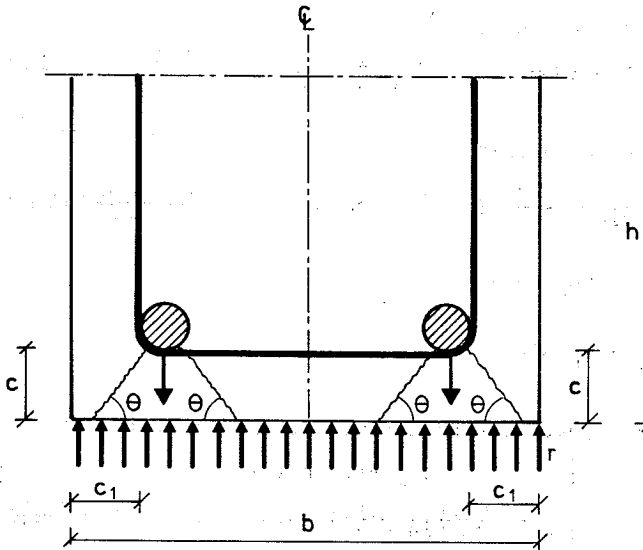
$$F = \frac{d+2k}{2d}$$

APPENDIX 2.

2000 2

BRUDFORMER MED 2 JERN. 1000 6 1000 1000

Appendix 2.1 Bjælke med to jern brud 1



Der regnes kun på halvdelen af bjælken.

For bruddet omkring hovedjernene anvendes samme betegnelser, som benyttet i afsnit 3.1.

Det ydre arbejde

Kraftens arbejde:

$$w_e = P \cos \alpha$$

Reaktionens arbejde:

$$w_e = -r \left(2 \left(c + \frac{d}{2} \right) \cot \theta \right) 2 \sin \alpha$$

Det indre arbejde:

Bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+k) \pi \frac{k}{\sin \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+2k-a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

Bidrag fra brudlinierne:

$$w_i = 2 \cdot \left(\frac{c+\frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) l \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \cos \theta) + \sigma_t \frac{\cos \theta - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} 2 \sin \alpha$$

Bidrag fra bøjlerne:

$$w_i = A_{bl} \cdot \sigma_b \sin \alpha$$

Sættes det ydre arbejde lig med det indre fås:

$$\frac{P}{l d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\gamma_c} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{(d+k)k}{d a \cos \alpha \sin \gamma} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \\ 0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{d+2k-a \tan \gamma}{d \cos \gamma \cos \alpha} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \end{array} \right\}$$

$$+ \left(\frac{c+\frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) \frac{4 \tan \alpha}{d \pi} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \cos \theta) + \sigma_t \frac{\cos \theta - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{2A_{bl} \sigma_b}{l d \sigma_c} \tan \alpha$$

$$+ \frac{4}{d \pi} \left(c + \frac{d}{2} \right) \cot \theta \tan \alpha \frac{r}{\sigma_c}$$

Bæreevnen kan også udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_C} = \min \left\{ \begin{array}{l} Dv \frac{0.8}{\sin(\varphi + 2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi + \gamma) \\ \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C \end{array} \right\}$$

$$\text{hvor: } \cot \gamma = \frac{1}{4} (3 + 5 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{Dv}})$$

$$C = \frac{4}{d\pi} \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) \left\{ \frac{v}{2} (1 - \cos \theta) + \rho \frac{\cos \theta - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

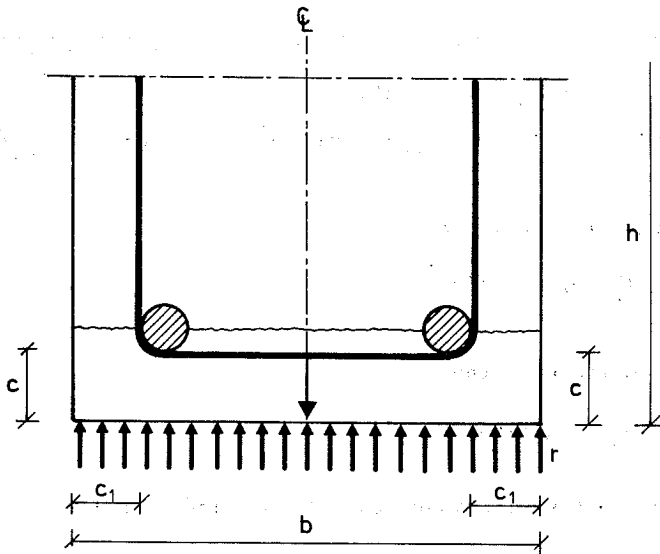
$$+ \frac{1}{2\pi} \phi_k + \frac{4}{d\pi} \left(c + \frac{d}{2} \right) \cot \theta \frac{r}{\sigma_C}$$

$$D = \frac{(d+k)k}{2da}$$

$$F = \frac{d+2k}{2d}$$

Der er antaget plan spændingstilstand i det viste snit i bjælken. Ud over restriktionerne på α og γ gælder derfor $\theta \leq 90 - \varphi$.

Appendix 2.2 Bjælke med to jern brud 2.



Der regnes kun på halvdelen af bjælken.

For bruddet omkring hovedjernene anvendes samme betegnelser som anvendt i afsnit 3.1.

Det ydre arbejde:

Kraftens arbejde:

$$w_C = P \cos \alpha$$

Reaktionens arbejde:

$$w_C = -r \frac{b}{2} l \cdot 2 \sin \alpha$$

Det indre arbejde:

Bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right):$$

$$w_i = (d+k) \pi \frac{k}{\sin \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right):$$

$$w_i = (d+2k-a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \varphi} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

Bidrag fra brudlinierne:

$$w_i = \left(\frac{b}{2} - d \right) l \sigma_t 2 \sin \alpha$$

Bidrag fra bøjlerne:

$$w_i = A_{bl} \cdot \sigma_b \sin \alpha$$

Sættes det ydre arbejde lig med det indre fås:

$$\frac{P}{l d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\sigma_c} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right): \\ \frac{(d+k)k}{d a \cos \alpha \sin \gamma} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \\ 0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right): \\ \frac{d+2k-a \tan \gamma}{d \cos \gamma \cos \alpha} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{2(\frac{b}{2} - d)}{\pi d} \rho \tan \alpha + \frac{1}{2\pi} \frac{2A_{bl} \sigma_b}{l d \sigma_c} \tan \alpha$$

$$+ \frac{b}{\pi d} \frac{r}{\sigma_c} \tan \alpha$$

Bæreevnen kan også udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_C} = \min \left\{ \begin{array}{l} Dv \frac{0.8}{\sin(\varphi + 2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi + \gamma) \\ \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C \end{array} \right\}$$

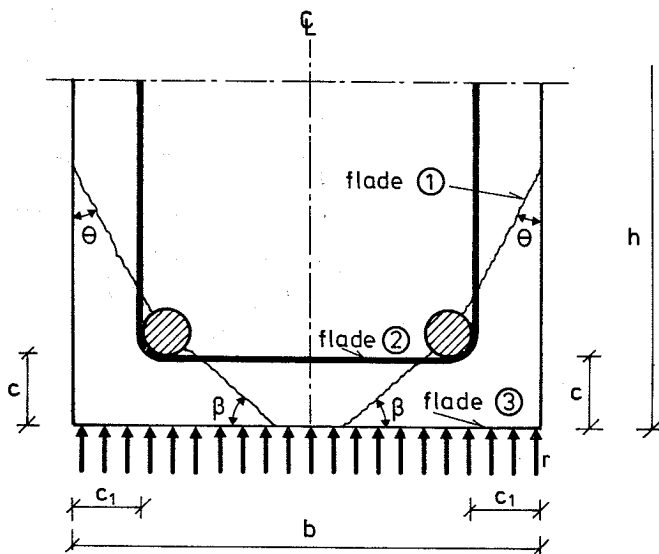
$$\text{hvor: } \cot \varphi = \frac{1}{4} (3 + 5 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{Dv}})$$

$$C = \frac{2(\frac{b}{2} - d)}{\pi d} \rho + \frac{1}{2\pi} \psi_k + \frac{b}{\pi d} \frac{r}{\sigma_C}$$

$$D = \frac{(d+k)k}{2d a}$$

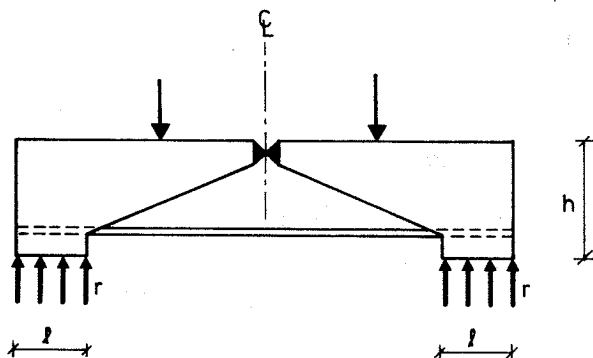
$$F = \frac{d+2k}{2d}$$

Appendix 2.3 Bjælke med to jern, brud 3.

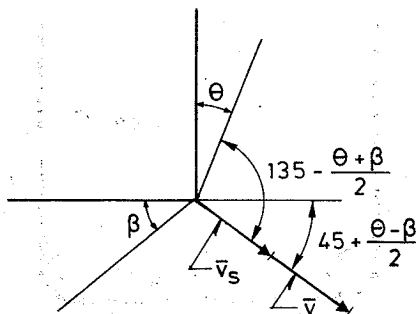


Der regnes kun på halvdelen af bjælken.

Set fra siden har bjælken følgende udseende:



De relative flytninger mellem bruddets enkelte dele:



Flade ① og flade ②:

Længde af bevægelsen:

$$\|\bar{v}\| = 2\sin\alpha$$

Bøjlearmeringen:

Længde af bevægelsen:

$$\|\bar{v}_s\| = \sin\alpha$$

Flade ① og flade ②:

Vinkel mellem \bar{v} og flade ① og mellem \bar{v} og flade ②:

$$\frac{3}{4}\pi - \frac{\theta + \beta}{2}$$

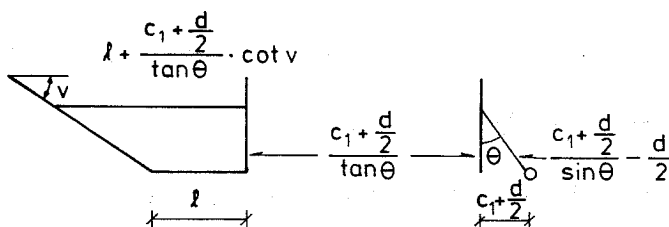
Bøjlearmeringen:

Vinklen mellem \bar{v}_s og lodret:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\theta - \beta}{2}$$

Arealer af de indgående flader:

Flade ①:



$$F_① = \frac{1}{2} (2l + \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\tan \theta} \cot v) (\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2})$$

Flade ②:

$$F_② = (\frac{c + \frac{d}{2}}{\sin \beta} - \frac{d}{2}) l$$

Flade ③:

$$F_③ = (c_1 + \frac{d}{2} + \frac{c + \frac{d}{2}}{\tan \beta}) l$$

For bruddet omkring jernene anvendes samme betegnelser som i (3.1.1).

Herefter fås det ydre arbejde:

Bidrag fra jernets flytning:

$$w_e = P \cos \alpha$$

Bidrag fra vederlagstrykket, flade ③:

$$w_e = - 2 \sin \alpha \sin (\frac{\pi}{4} + \frac{\theta - \beta}{2}) (c_1 + \frac{d}{2} + \frac{c + \frac{d}{2}}{\tan \beta}) l \cdot r$$

Bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \text{Arctan}\left(\frac{k}{a}\right)$$

$$w_i = (d+k)\pi \frac{k}{\sin\gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \text{Arctan}\left(\frac{k}{a}\right)$$

$$w_i = (d+2k - a \tan\gamma) \pi \frac{a}{\cos\gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \right\}$$

Bidrag fra flade ①:

$$w_i = 2 \sin \alpha \frac{1}{2} (2l + (c_1 + \frac{d}{2}) \cot\theta \cot\psi) \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin\theta} - \frac{d}{2} \right) \\ \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2})) + \sigma_t \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2}) - \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \right\}$$

Bidrag fra flade ②:

$$w_i = 2 \sin \alpha \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\sin\beta} - \frac{d}{2} \right) l \cdot \\ \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2})) + \sigma_t \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2}) - \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \right\}$$

Bidrag fra armeringen:

$$w_i = \sin\alpha [A_{b\ell} \sigma_b \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta + \beta}{2}) + A_{bv} \sigma_b \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta + \beta}{2})]$$

Sættes det ydre arbejde lig det indre fås:

$$\frac{P}{\ell d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\sigma_c} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma \geq \text{Arctan}(\frac{k}{a}) \\ \frac{(d+k)k}{d \cos \alpha \sin \gamma} \{ \frac{\nu}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \} \\ 0 \leq \gamma \leq \text{Arctan}(\frac{k}{a}) \\ \frac{d+2k - a \tan \gamma}{d \cos \alpha \cos \gamma} \{ \frac{\nu}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \} \end{array} \right\} +$$

$$+ \frac{\tan \alpha}{\ell d \pi} \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) (2\ell + (c_1 + \frac{d}{2}) \cot \theta \cot \nu) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\nu}{2} (1 - \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2})) + \rho \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2}) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} +$$

$$+ \frac{2 \tan \alpha}{d \pi} \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\sin \beta} - \frac{d}{2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\nu}{2} (1 - \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2})) + \rho \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2}) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} +$$

$$+ \frac{\tan \alpha}{2\pi} \left[\frac{2A_b \ell^\sigma b}{\ell d \sigma_c} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta - \beta}{2}) + \frac{2A_b \nu^\sigma b}{\ell d \sigma_c} \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta - \beta}{2}) \right] +$$

$$+ \frac{2 \tan \alpha}{d \pi} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta - \beta}{2}) (c_1 + \frac{d}{2} + (c + \frac{d}{2}) \cot \beta) \frac{r}{\sigma_c}$$

Der er antaget plan spændingstilstand i det viste snit i bjælken. Ud over restriktionerne på α og γ gælder derfor

$$\text{Arctan}(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{h - c - \frac{d}{2}}) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arctan}(\frac{c + \frac{d}{2}}{\frac{b}{2} - c_1 - \frac{d}{2}}) \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2}) \geq \varphi$$

Bæreevnen kan også udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \min \left\{ Dv \frac{0.8}{\sin(\varphi + 2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi + \gamma) \right. \\ \left. \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C \right\}$$

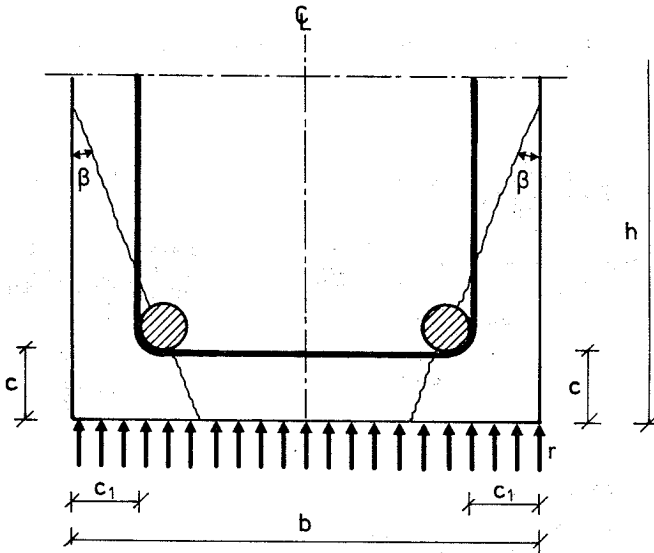
$$\text{hvor: } \cot \gamma = \frac{1}{4} (3 + 5 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{Dv}})$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{1}{d} \pi \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \theta} - \frac{d}{2} \right) (2\ell + (c_1 + \frac{d}{2}) \cot \theta \cot \psi) \cdot \\ \left\{ \frac{\psi}{2} (1 - \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2})) + \rho \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2}) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \\ + \frac{2}{d} \frac{1}{\pi} \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\sin \beta} - \frac{d}{2} \right) \left\{ \frac{\psi}{2} (1 - \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2})) + \rho \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta + \beta}{2}) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\} \\ + \frac{1}{2\pi} (\psi_\ell \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta - \beta}{2}) + \psi_\psi \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta - \beta}{2})) \\ + \frac{2}{d} \frac{1}{\pi} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta - \beta}{2}) (c_1 + \frac{d}{2} + (c + \frac{d}{2}) \cot \beta) \frac{r}{\sigma_c}$$

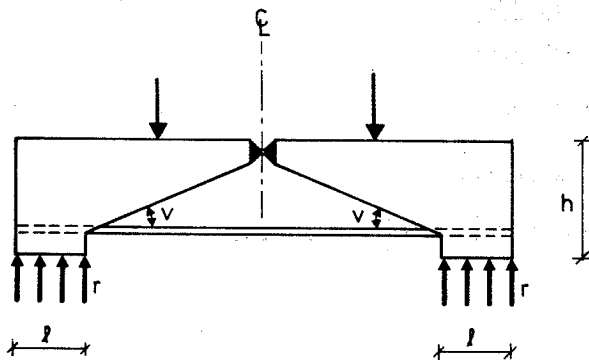
$$D = \frac{(d+k)k}{2da}$$

$$F = \frac{d+2k}{2d}$$

Appendix 2.4 Bjælke med to jern, brud 4.



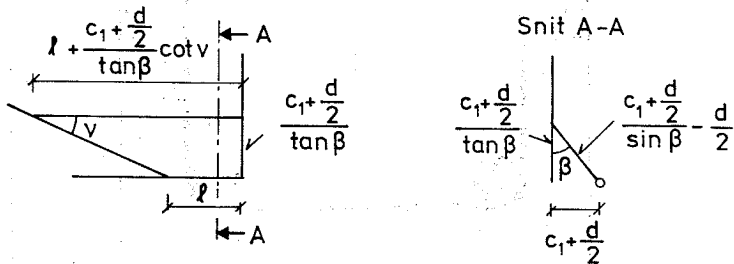
Set fra siden har bjælken det viste udseende:



Der regnes kun på halvdelen af bjælken.

Med den valgte brudfigur er der rent adskillelsesbrud i de viste to brudflader.

Øverste del af brudfladen får det viste udseende:



Brudfladens areal:

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} - \frac{d}{2} \right) \left(2l + \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\tan \beta} \cot \gamma \right)$$

For bruddet omkring hovedjernene anvendes samme betegnelser som anvendt i afsnit 3.1.

Det ydre arbejde:

Kraftens arbejde:

$$w_e = P \cdot \cos \alpha$$

Reaktionens arbejde:

$$w_e = -r \left(c_1 + \frac{d}{2} + \left(c + \frac{d}{2} \right) \tan \beta \right) l \cdot 2 \sin \alpha \sin \beta$$

Det indre arbejde:

Bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right):$$

$$w_i = (d+k) \pi \frac{k}{\sin \gamma} \frac{\ell}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right):$$

$$w_i = (d+2k+a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \gamma} \frac{\ell}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

Bidrag fra brudlinierne:

$$w_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} - \frac{d}{2} \right) (2\ell + \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\tan \beta} \cot v) + \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} - \frac{d}{2} \right) \ell \right] 2 \sin \alpha \sigma_t$$

Bidrag fra bøjlerne:

$$w_i = A_{b\ell} \sigma_b \sin \alpha \sin \beta + A_{bv} \sigma_b \sin \alpha \cos \beta$$

Sættes det ydre arbejde lig det indre fås:

$$\begin{aligned} \frac{P}{\ell d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\sigma_c} = & \left\{ \begin{array}{l} \gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{(d+k)k}{d a \cos \alpha \sin \gamma} \left(\frac{v}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) \\ 0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right) \\ \frac{d+2k+a \tan \gamma}{d \cos \gamma \cos \alpha} \left(\frac{v}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) \end{array} \right\} + \\ & + \frac{2\rho}{\ell d \pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} - \frac{d}{2} \right) (2\ell + \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\tan \beta} \cot v) + \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} - \frac{d}{2} \right) \ell \right] \tan \alpha \\ & + \frac{1}{2 \pi} \left[\frac{2A_{b\ell} \sigma_b}{\ell d \sigma_c} \sin \beta + \frac{2A_{bv} \sigma_b}{\ell d \sigma_c} \cos \beta \right] \tan \alpha \\ & + \frac{2}{d \pi} \left(c_1 + \frac{d}{2} + (c + \frac{d}{2}) \tan \beta \right) \tan \alpha \sin \beta \frac{r}{\sigma_c} \end{aligned}$$

Bæreevnen kan også udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \min \left\{ \begin{array}{l} Dv \frac{0.8}{\sin(\varphi - 2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi + \gamma) \\ \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C \end{array} \right\}$$

$$\text{hvor: } \cot \gamma = \frac{1}{4} (3 + 5 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{Dv}})$$

$$C = \frac{2\rho}{\pi d} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} - \frac{d}{2} \right) \left(2\ell + \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\tan \beta} \cot v \right) + \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} - \frac{d}{2} \right) \ell \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \pi (\psi_\ell \sin \beta + \psi_v \cos \beta)$$

$$+ \frac{2}{d} \left(c_1 + \frac{d}{2} + \left(c + \frac{d}{2} \right) \tan \beta \right) \sin \beta \frac{r}{\sigma_c}$$

$$D = \frac{(d+k)k}{2da}$$

$$F = \frac{d+2k}{2d}$$

Geometriske bånd på brudfiguren kræver:

$$\beta > \text{Arctan} \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{h - (c + \frac{d}{2})} \right)$$

Det indre arbejde:

Bidrag fra kammene:

$$\gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right):$$

$$w_i = (d+k) \pi \frac{k}{\sin \alpha} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

$$0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right)$$

$$w_i = (d+2k - a \tan \gamma) \pi \frac{a}{\cos \gamma} \frac{l}{a} \left\{ v \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \sigma_t \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right\}$$

Bidrag fra brudfladen:

$$\begin{aligned} w_i &= \int_0^{\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta}} x \omega \left(l + \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\tan \beta} \cot v - x \cot v \right) dx \sigma_t \\ &+ \omega \cdot \left[\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} + \frac{1}{2} \frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} \right] \frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} l \sigma_t \\ &- \omega \cdot \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} l d \sigma_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_i &= \left[\frac{1}{2} \omega \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} \right)^2 l + \frac{1}{2} \omega \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\tan \beta} \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} \right)^2 \cot v - \frac{1}{3} \omega \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} \right)^3 \cot v \right] \sigma_t \\ &+ \left[\omega \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} \frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} l + \frac{1}{2} \omega \left(\frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} \right)^2 l \right] \sigma_t - \omega \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} l d \sigma_t \\ &= \frac{1}{2} \omega \left[\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} + \frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} \right]^2 l \sigma_t - 2 \sin \alpha l d \sigma_t \\ &+ \sigma_t \left[\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\tan \beta} - \frac{2 \sin \alpha}{3} \right] \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} \right)^2 \cot v \end{aligned}$$

Bidrag fra bøjlerne:

$$w_i = A_{bl} \sigma_b \sin \alpha \sin \beta + A_{bv} \sigma_b \sin \alpha \cos \beta$$

Sættes det ydre arbejde lig det indre fås:

$$\frac{P}{\ell d \pi \sigma_c} = \frac{\tau}{\sigma_c} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma \geq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right): \\ \frac{(d+k)k}{d a \cos \alpha \sin \gamma} \left(\frac{v}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) \\ \\ 0 \leq \gamma \leq \text{Arctan} \left(\frac{k}{a} \right): \\ \frac{d+2k-a \tan \gamma}{d \cos \gamma \cos \alpha} \left(\frac{v}{2} (1 - \sin(\alpha - \gamma)) + \rho \frac{\sin(\alpha - \gamma) - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right) \end{array} \right\} +$$

$$+ \frac{\tan \alpha \sin \beta}{\pi (c_1 + \frac{d}{2}) d} \left[\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} + \frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} \right]^2 \rho - \frac{2}{\pi} \rho \tan \alpha$$

$$+ \frac{\rho}{\ell d \pi} \left[\frac{\tan \alpha \sin \beta}{\tan \beta} - \frac{2 \tan \alpha}{3} \right] \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} \right)^2 \cot v$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2A_b \ell \sigma_b}{\ell d \sigma_c} \sin \beta + \frac{2A_{bv} \sigma_b}{\ell d \sigma_c} \cos \beta \right] \tan \alpha$$

$$+ \frac{\tan \alpha \sin \beta}{\pi d (c_1 + \frac{d}{2})} (c_1 + \frac{d}{2} + (c + \frac{d}{2}) \tan \beta)^2 \frac{r}{\sigma_c}$$

Bæreevnen kan også udtrykkes som:

$$\frac{\tau}{\sigma_c} = \min \left\{ \begin{array}{l} Dv \frac{0.8}{\sin(\varphi - 2\gamma) - 0.6} + C \tan(\varphi + \gamma) \\ \\ \frac{1}{2} Fv + \frac{3}{4} C \end{array} \right\}$$

$$\text{hvor: } \cot \gamma = \frac{1}{4} (3 + 5 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{Dv}})$$

$$C = \frac{\sin \beta}{\pi (c_1 + \frac{d}{2}) d} \left[\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} + \frac{c + \frac{d}{2}}{\cos \beta} \right]^2 \rho - \frac{2}{\pi} \rho +$$

$$+ \frac{\rho}{\ell d \pi} [\cos \beta - \frac{2}{3}] \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{\sin \beta} \right)^2 \cot v$$

$$+ \frac{1}{2\pi} [\psi_\ell \sin \beta + \psi_v \cos \beta]$$

$$+ \frac{\sin \beta}{\pi d (c_1 + \frac{d}{2})} (c_1 + \frac{d}{2} + (c + \frac{d}{2}) \tan \beta)^2 \frac{r}{\sigma_c}$$

$$D = \frac{(d+k)k}{2da}$$

$$F = \frac{d+2k}{2d}$$

Geometriske bånd på brudfiguren kræver:

$$\beta > \text{Arctan} \left(\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{h - (c + \frac{d}{2})} \right)$$

Øvre værdien vil ellers blive dårligere når omdrejningspunktet rykker ovenfor bjælkens overkant. Det indre arbejde i brudlinien vil ikke mere være 0 i den ene ende, men større end 0.

AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Department of Structural Engineering
Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

SERIE B
(Tidligere: Rapporter)

- R 132. BRINCKER, RUNE: Plane revneudbredelsesproblemer i li-
near viscoelastiske materialer. Revnemodeller og udbre-
delseskriterier. 1983.
- R 133. Reserveret.
- R 134. ABK's informationsdag 1981. 1981.
- R 135. Resuméoversigt 1980. Summaries of Papers 1980. 1981.
- R 136. BACH, FINN og M.P. NIELSEN: Nedreværdiløsninger for
jernbetonplader. 1981.
- R 137. Publication pending.
- R 138. NIELSEN, LEIF OTTO og PETER NITTEGAARD-NIELSEN: Element-
metodeberegninger på mikrodatamat. 1981.
- R 139. MONDORF, P.E.: Concrete Bridges. Literature Index.
1981.
- R 140. NIELSEN, METTE THIEL: Lamb's Problem. Internal Harmonic
Point Load in a Half-Space. 1981.
- R 141. JENSEN, JESPER FRØBERT: Plasticitetsteoretiske løsninger
for skiver og bjælker af jernbeton. 1982.
- R 142. MÖLLMANN, H.: Thin-Walled Elastic Beams with Finite
Displacements. 1981.
- R 143. KRAGERUP, JAN: Five Notes on Plate Buckling. 1982.
- R 144. NIELSEN, LEIF OTTO: Konstitutiv modellering af frik-
tionsdæmpning. 1982.
- R 145. NIELSEN, LEIF OTTO: Materiale med friktion til numeriske
beregninger. 1982.
- R 146. Resuméoversigt 1981. Summary of Papers 1981. 1982.
- R 147. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBÆK-HANSEN: Bolted End Plate
Connections in Round Bar Steel Structures. 1982.
- R 148. NIELSEN, LEIF OTTO: Svingninger med friktionsdæmpning.
1982.
- R 149. PEDERSEN, CARL: Stability Properties and Non-Linear
Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-
Section. Part 1: Basic Analysis. 1982.
- R 150. PEDERSEN, CARL: Stability Properties and Non-Linear
Behaviour of Thin-Walled Elastic Beams of Open Cross-
Section. Part 2: Numerical Examples. 1982.
- R 151. KRENCHER, HERBERT and HANS WINDBERG JENSEN: Organic
Reinforcing Fibres for Cement and Concrete. 1982.
- R 152. THIEL, METTE: Dynamic Interaction between Soil and Foun-
dation. 1982.
- R 153. THIEL, METTE: Soil-Pile Interaction in Horizontal Vibra-
tion. 1982.
- R 154. RIBERHOLT, H. og PER GÖLTERMANN: Sømmede træbjælker.
1982.
- R 155. JENSEN, JENS HENNING: Forkammede armeringsstængers for-
ankring, specielt ved vederlag. 1. del. 1982.
- R 156. JENSEN, JENS HENNING: Forkammede armeringsstængers for-
ankring, specielt ved vederlag. 2. del. Appendix A til
F. 1982.
- R 157. ARPE, ROBERT and CLAES DYRBYE: Elasto-Plastic Response
to Stochastic Earthquakes. 1983.
- R 158. WALD, FRANTISEK: Non-Linear Analysis of Steel Frames
(with Special Consideration of Deflection). 1983.

- R 159. BRÆSTRUP, MIKAEL W.: Ten Lectures on Concrete Plasticity. Course given in Nanjing, China, October 1982. 1983.
- R 160. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Opbøjet spændarmering som forskydningsarmering. 1983.
- R 161. KRAGERUP, JAN: Buckling of Rectangular Unstiffened Steel Plates in Compression. 1983.
- R 162. FEDDERSEN, BENT og M.P. NIELSEN: Revneteorier for enaksede spændingstilstande. 1983.
- R 163. FEDDERSEN, B. og M. P. NIELSEN: Revneteorier for biaksiale spændingstilstande. 1983.
- R 164. GIMSING, NIELS J.: Preliminary Design and Optimization of Cable Systems for Bridges. 1983.
- R 165. Resuméoversigt 1982. Summaries of Papers 1982. 1983.
- R 166. NITTEGAARD-NIELSEN, PETER, JOHN FORBES OLESEN og HILMER RIBERHOLT: Elementmetodeberegning af skiveafstivede lamelkonstruktioner. 1983.
- R 167. RIBERHOLT, HILMER og PETER SPØER: Indlimede bolte til indfæstning af vingerne på Nibemølle-B. 1983.
- R 168. GIMSING, NIELS J. and ANDERS BORREGAARD SØRENSEN: Investigations into the Possibilities of Constructing Bridges with a Free Span of 3000 m. 1983.
- R 169. NIELSEN, LEIF OTTO: Randelementmetoden til 3-dimensional spændingsanalyse. 1983.
- R 170. NIELSEN, JOHN SANDER: A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams - Especially Over-Reinforced Beams - Subjected to Torsion. Part I. Theory. 1983.
- R 171. NIELSEN, JOHN SANDER: A Theoretical and Experimental Study of Concrete Beams - Especially Over-Reinforced Beams - Subjected to Torsion. Part II. Experiments. 1983.
- R 172. LANGSØ, H.E. og V. ASKEGAARD: Sammenhæng mellem frostdedbrydning af jernbetonbjælker og ændring af frekvensspektrum, dæmpningsforhold og bæreevne. 1983.
- R 173 - R 174. Reserveret. Publication pending.
- R 175. EXNER, HANS: Plasticitetsteori for Coulomb Materialer. 1983.
- R 176. EXNER, HANS: Betonbjælkers Bøjningsbæreevne. 1983.
- R 177. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBÆK-HANSEN: Optimum Design of Corner-Supported Double-Layer Space Trusses. 1983.
- R 178. BJØRNBÆK-HANSEN og H. AGERSKOV: Udmattelsesforsøg med Ortotrop Brobænepanel. 1983.
- R 179. KRISTIANSEN, NIELS ØRSKOV: Tryk- og Strømningsforhold i Siloer med Kohæsive Medier. 1984.
- R 180. NIELSEN, JOHN SANDER: The Effect of Stirrup Spacing on the Ultimate Load of Reinforced Concrete Beams Subjected to Pure Torsion. 1984.
- R 181. KERN, JENS CHR.: Numerisk Brudstadieberegning af Stift, Plastiske Materialer. 1984.
- R 182. FEDDERSEN, B., U. HESS, H. EXNER og M.P. NIELSEN: Gennemlokning af Huldælelementer.

Abonnement 1.7.1983 - 30.6.1984 kr. 110,-.

Subscription rate 1.7.1983 - 30.6.1984 D.Kr. 110.-.

Hvis De ikke allerede modtager Afdelingens resumeoversigt ved udgivelsen, kan Afdelingen tilbyde at tilsende næste års resumeoversigt, når den udgives, dersom De udfylder og returnerer nedenstående kupon.

Returneres til
Afdelingen for Bærende Konstruktioner
Danmarks tekniske Højskole
Bygning 118
2800 Lyngby

Fremtidig tilsendelse af resumeoversigter udbedes af
(bedes udfyldt med blokbogstaver):

Stilling og navn:

Adresse:

Postnr. og -distrikt:

The Department has pleasure in offering to send you a next year's list of summaries, free of charge. If you do not already receive it upon publication, kindly complete and return the coupon below.

To be returned to:
Department of Structural Engineering
Technical University of Denmark
Building 118
DK-2800 Lyngby, Denmark.

The undersigned wishes to receive the Department's

List of Summaries:

(Please complete in block letters)

Title and name

Address.....

Postal No. and district.....

Country.....

Wiederholungsfragen sind in der Regel einfacher zu beantworten als die eigentlichen Fragen. Sie dienen dazu, das Verständnis der Grundlagen zu überprüfen. Die eigentlichen Fragen sind oft komplexer und erfordern ein tieferes Verständnis der Materie.

Die Wiederholungsfragen sind in der Regel einfacher zu beantworten als die eigentlichen Fragen. Sie dienen dazu, das Verständnis der Grundlagen zu überprüfen. Die eigentlichen Fragen sind oft komplexer und erfordern ein tieferes Verständnis der Materie.

Die Wiederholungsfragen sind in der Regel einfacher zu beantworten als die eigentlichen Fragen. Sie dienen dazu, das Verständnis der Grundlagen zu überprüfen. Die eigentlichen Fragen sind oft komplexer und erfordern ein tieferes Verständnis der Materie.

Die Wiederholungsfragen sind in der Regel einfacher zu beantworten als die eigentlichen Fragen. Sie dienen dazu, das Verständnis der Grundlagen zu überprüfen. Die eigentlichen Fragen sind oft komplexer und erfordern ein tieferes Verständnis der Materie.

Die Wiederholungsfragen sind in der Regel einfacher zu beantworten als die eigentlichen Fragen. Sie dienen dazu, das Verständnis der Grundlagen zu überprüfen. Die eigentlichen Fragen sind oft komplexer und erfordern ein tieferes Verständnis der Materie.

Die Wiederholungsfragen sind in der Regel einfacher zu beantworten als die eigentlichen Fragen. Sie dienen dazu, das Verständnis der Grundlagen zu überprüfen. Die eigentlichen Fragen sind oft komplexer und erfordern ein tieferes Verständnis der Materie.

Die Wiederholungsfragen sind in der Regel einfacher zu beantworten als die eigentlichen Fragen. Sie dienen dazu, das Verständnis der Grundlagen zu überprüfen. Die eigentlichen Fragen sind oft komplexer und erfordern ein tieferes Verständnis der Materie.